ACADÉMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le grade de Docteur de spécialité, mention PHYSIQUE THÉORIQUE

UNE APPROCHE DU PHENOMENE D'ECROULEMENT GRAVITATIONNEL DE PAR L'ETUDE D'UNE EXTENSION ANALYTIQUE DE LA METRIQUE INTERIEURE DE SCHWARZSCHILD

par

Ghislaine RIOS

Soutenue le 5 Avril 1979 devant la Commission d'Examen.

JURY : M. H. ANDRILLAT — Président

Mme J. CHARLES, M. M. LEFRANC — Assesseurs

ATELIER DUPLICATION
— U.S.T.L. —

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546012_0035

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le grade de Docteur de spécialité, mention PHYSIQUE THÉORIQUE

UNE APPROCHE DU PHENOMENE D'ECROULEMENT GRAVITATIONNEL DE PAR L'ÉTUDE D'UNE EXTENSION ANALYTIQUE DE LA METRIQUE INTERIEURE DE SCHWARZSCHILD

par

Ghislaine RIOS

Soutenue le 5 Avril 1979 devant la Commission d'Examen.

JURY :	M.	H.	ANDRILLAT	Président
	Mme	J.	CHARLES	Assesseurs
	M.	M.	LEFRANC	

ATELIER DUPLICATION
— U.S.T.L. —

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

U N I V E R S I T E
DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DU LANGUEDOC

L I S T E D E S P R O F E S S E U R S

Président : L. THALER

Vices-Présidents MM. CORRIU, PIETRASANTA et NOUAZE

Doyens Honoraires à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc :

P. MATHIAS
B. CHARLES
A. CASADEVALL

Président Honoraire :
P. DUMONTET

Professeurs Honoraires de l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc :

-R. JACQUES
-M. CASTERAS
-E. TURRIERE
-C. CAUQUIL
-G. DENIZOT
-J. GRANIER
-Ch. BOUHET
-J. SALVINIEN
-M. MOUSSERON
-P. CHATELAIN
-A.M VERGNOUX
-E. KAHANE
-Ch. SAUVAGE
-J.M MORETTI
-G. COUCHET
-P. DEMANGEON

Secrétaire Général :
E. SIAU

Professeurs titulaires :

-M. J.-P. ROIG ..... Physique
-M. J. AVIAS ..... Géologie
-M. J.-J. MOREAU ..... Mécanique rationnelle
-M. B. CHARLES ..... Mathématiques pures
-M. R. JOUTY ..... Physique
-M. R. LEGENDRE ..... Zoologie
-M. I. ASSENMACHER ..... Physiologie animale

M. Ch. ROUMIEU	Analyse supérieure
M. J. ROBIN	Physique
M. B. PISTOULET	Physique
M. A. POTIER	Chimie minérale
M. R. LAFONT	Physique
M. R. JACQUIER	Chimie
M. J. FALGUEIRETTES	Minéralogie
M. J. REGNIER	Chimie
Mme J. CHARLES	Mathématiques
M. J. ROUZAUD	Chimie
M. P. CAILLON	Physique
M. H. CHRISTOL (E.N.S.C.M.)	Chimie
M. H. ANDRILLAT	Astronomie
Mme G. VERNET	Biologie animale
M. L. CECCHI	Physique
M. L. EUZET	Zoologie
M. C. DELOUPY	Physique
M. M. MATTAUER	Géologie
M. M. SAVELLI	Physique
M. R. MARTY	Psychophysiologie
M. A. BONNET	Botanique
M. G. LAMATY	Chimie
Mme S. ROBIN	Physique
M. R. CORRIU	Chimie
Mme N. PARIS	Physiologie végétale
M. J. ZARZYCKI	Sciences des matériaux
M. M. MAURIN	Chimie minérale
M. L. THALER	Paléontologie
M. S. GROMB	Chimie physique
M. J.V. ZANCHETTA	Chimie générale
M. P. SABATIER	Mathématiques
M. F. SCHUE	Chimie organique
M. E. GROUBERT	Physique
M. Ch. CASTAING	Mathématiques
M. M. ROUZEYRE	Physique
M. F. PROUST	Géologie
M. J. PARIS	Biologie animale

- M. A. GROTHENDIECK ..... Mathématiques
- M. C. DURANTE ..... Physique
- M. G. BOUGNOT ..... Physique
- M. G. LECOY ..... E. E. A.
- M. R. GAUFRES ..... Chimie
- M. J.D. BAYLE ..... Physiologie animale
- M. J.L. IMBACH ..... Chimie
- M. J.P. FILLARD ..... E. E. A.
- M. N. ROBY ..... Mathématiques
- M. Ph. JEANTEUR ..... Biochimie

Professeurs sans chaire :

- M. G. TOURNE ..... Chimie
- M. J. REMY ..... Géologie
- Mme H. GUASTALLA ..... Biologie physico-chimique
- M. R. LENEL ..... Biologie animale
- M. A. BASSOMPIERRE ..... Physique
- M. R. JONARD ..... Botanique
- M. R. CANO (I.U.T.) ..... Mesures physiques
- M. P. MOLINO ..... Mathématiques
- M. J. LEGRAND ..... Physiologie animale
- M. J. D'AUZAC ..... Physiologie végétale
- M. G. BOUIX ..... Zoologie
- M. M. AMANIEU (I.S.I.) ..... Hydrologie et mariculture
- M. M. DENIZOT ..... Biologie végétale
- M. B. BRUN ..... Chimie physique
- M. L. GIRAL ..... Chimie organique
- M. J.P. QUIGNARD ..... Zoologie
- M. Ph. VIALLEFONT ..... Chimie
- M. A. RAIBAUT ..... Zoologie
- M. P. VITSE ..... Chimie minérale
- M. J. GRIMAUD (E.N.S.C.M.) ..... Chimie
- M. J. GARCIA (I.U.T. Nimes) ..... Génie mécanique
- M. P. LOUIS ..... Géophysique appliquée
- M. Cl. BOCQUILLON ..... Hydrologie
- M. A. DONNADIEU ..... Physique

- M. M. LEFRANC ..... Mathématiques
- M. G. MASCHERPA ..... Chimie
- M. C. GOUT ..... Physique
- M. J.P. TRILLES ..... Biologie appliquée
- M. F. HALLE ..... Biologie végétale
- M. G. BORDURE ..... Génie électrique
- M. J.P. NOUGIER ..... Electronique
- M. M. GODRON ..... Ecologie végétale
- M. L. LASSABATERE ..... E. E. A.
- M. J. LAPASSET ..... Physique - mesure physique
- M. M. AVEROUS ..... Physique - Génie électrique

Professeurs Associés :

- M. A. MICALI ..... Mathématiques
- M. H. BILGER ..... Physique
- M. G. AUBERSON ..... Mathématiques

Professeurs associés d'Université :

- M. L. DAUZIER ..... Physiologie animale
- M. GALZY ..... Biochimie
- M. C. MAURIN ..... Biologie animale
- M. R. SENOUILLET ..... Economie et gestion
- M. E. SERVAT ..... Géologie
- M. C. VAGO ..... Biologie animale
- Mme M. VAN CAMPO ..... Biologie végétale
- M. E. VERDIER ..... Chimie
- M. F. WINTERNITZ ..... Chimie

Maîtres de conférences :

- M. G. LOUPIAS ..... Mathématiques
- M. R. HAKIM ..... Mathématiques
- M. F. LAPSCHER ..... Mathématiques
- M. J. CROUZET (I.S.I.) ..... Biochimie appliquée
- M. A. COMMEYRAS ..... Chimie organique
- Mlle M. LEVY (I.U.T.) ..... Chimie

- M. J. LAGARRIGUE (I.U.T.) ..... Biologie appliquée
- M. Cl. DROGUE (I.S.I.) ..... Hydrogéologie
- M. P. GENESTE (E.N.S.C.M.) ..... Chimie physique appliquée
- M. J. CHEFTEL (I.S.I.) ..... Biochimie appliquée à l'alimentation
- M. Y. PIETRASANTA (E.N.S.C.M.) ..... Chimie appliquée
- M. B. LEMAIRE (I.S.I.) ..... Mathématiques appliquées Informatique
- M. H. MATHIEU ..... E. E. A.
- M. M. VALADIER ..... Mathématiques
- M. J.L. ROBERT (I.U.T. Nimes) ..... Génie électrique
- M. O. MAISONNEUVE ..... Mécanique
- M. R. BRUNEL ..... Physique
- M. M. CADENE ..... Physique
- M. P. DELORD ..... Physique
- M. A. PAVIA ..... Chimie
- M. J.M. BESSIERES ..... Chimie
- M. J.P. BARD ..... Géologie
- M. P. JOUANNA (I.U.T. Nimes) ..... Génie Civil
- M. R. BEN AIM (I.S.I.) ..... Génie chimique et traitement des eaux
- M. P. BESANCON ..... Physiologie de la nutrition appliquée à l'alimentation
- M. Y. NOUAZE ..... Mathématiques
- M. J. PETRISSANS ..... Chimie
- M. J.Y. GAL ..... Chimie analytique appliquée
- M. C. BENOIT ..... Physique
- M. H. GIBERT (I.S.I.) ..... Génie alimentaire
- M. A. LIEGEOIS ..... Automatique
- M. L. COT (E.N.S.C.M.) ..... Chimie
- M. B. TARODO DE LA FUENTE (I.S.I.) ..... Biochimie appliquée et Techniques des matières alimentaires
- M. Y. ESCOUFIER ..... Informatique
- M. A. SANS ..... Psychophysiologie
- M. G. DURAND ..... Chimie
- M. B. FILLIATRE ..... Informatique et gestion
- M. J.J. MACHEIX ..... Physiologie végétale

- M. P. HINZELIN ..... Génie civil
- M. Cl. BOKSENBAUM ..... Informatique
- M. G. CAMBON ..... E. E. A.
- M. J. FERRIE ..... Informatique
- M. E. AKUTOWICZ ..... Mathématiques
- M. D. AUVERGNE ..... E. E. A.
- M. B. LEBLEU ..... Biochimie

Maître de conférences agrégé :

- M. R. REIX ..... Sciences de gestion

Maîtres de conférences associés :

- M. M. PETRICH ..... Mathématiques
- M. D. LEE ..... Botanique

Chargé d'enseignement :

Néant

Chargé des fonctions de maître de conférences :

- M. G. SAUMADE (I.U.T.) ..... G. E. A. (Economie des entreprises)

Chargés de cours :

- M. M. MOUTON (I.U.T.) ..... Economie et gestion
- M. Ph. FOUCOU (I.U.T.) ..... Sciences économiques

Je tiens vivement à remercier Monsieur Andrillat pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, suscitant toujours en moi, par son remarquable esprit d'analyse, le désir de poursuivre, permettant ainsi l'élaboration et l'achèvement de cette thèse.

Je remercie également Madame Charles et Monsieur Lefranc qui ont accepté non seulement de lire ce texte et de me faire part d'un certain nombre de remarques trés justifiées, mais encore de participer au Jury de cette thèse, ce dont je suis trés honorée.

Le sage en tant qu'astronome.

AUSSI LONGTEMPS QUE TU SENTIRAS

LES ETOILES " AU-DESSUS " DE TOI, TU NE POSSEDERAS

PAS LE REGARD DE LA CONNAISSANCE.

Par-delà bien et mal : NIETZSCHE

Ayant entrepris un travail relatif au problème de l'extension analytique de la métrique intérieure de Schwarzschild dans le but d'appréhender d'une manière différente de celle de Kruskal,la problématique du Trou Noir,j'ai été confrontée à une des questions fondamentales de la science,à savoir :
- Cette façon d'opérer correspond-t-elle à une attitude scientifique,c'est-à-dire relève-t-elle d'une Méthode ?
Et c'est bien cette question qui préocuppe,consciemment ou inconsciemment toute tentative de recherche,la question du "Comment":comment atteindre une certaine connaissance de l'univers dans lequel nous vivons ?
Ce questionnement explique le fait que je me permette,avant d'aborder l'exposé relatif à cette extension analytique,ce qui pourrait être considéré comme pure disgression,mais qui,en réalité,est intrinsèquement lié aux chapîtres suivants en ce sens que les considérations méthodologiques font partie implicitement du débat scientifique.Je ne fais,ici,que les expliciter.

Avant de considérer le problème spécifique de la Méthode permettant d'accéder à une certaine connaissance scientifique,il est intéressant de s'interroger quant à l'apparition de ce désir de connaissance.Comment se fait-il que l'homme désire connaître ? Comment se fait-il qu'il ait un jour tourné son regard vers le ciel et l'ait contemplé interrogativement ? L'existence même du point d'interrogation est intrinsèquement liée au phénomène de la perception.Mais le fait de percevoir

toujours "le Même",d'être affecté dans son corps par une exté--riorité procurant inéluctablement la même sensation (la lumière du Soleil fait cligner les yeux ...),ne peut engendrer la Question.C'est dans la différence qu'elle émerge.En effet,si quelque chose advient qui vient faire rupture,si l'homme est surpris,à l'image de ce "premier homme" qui,tous les jours,avait coutume d'aller s'asseoir au bord d'un ruisseau,et se retrouve, un beau jour,sur cette même pierre mais ... le ruisseau n'est plus là ; alors surgit la Question,alors apparaît le désir de comprendre et par là,de s'informer pour savoir...

Un peu d'histoire...

Ainsi les Anciens s'interrogèrent relativement aux apparences du Monde dans lequel ils vivaient,et essayèrent d'en rendre compte.Leurs tentatives,entachées de convictions mystiques et de conceptions religieuses,sans aucune loi de continuité natu--relle des phénomènes,apparaissent aujourd'hui comme des plus naïves,s'efforçant de former un système rigide aux exigences duquel toute vérité devait répondre.Ainsi les Chinois affirmè--rent que tout provenait de la collision de deux principes,le "Yang" et le "Yin",le "Yang" qui est le principe masculin, associé au ciel,au soleil,à toutes les propriétés actives et positives,le "Yin" étant le principe féminin,associé à la terre à l'obscurité,à tout ce qui est passif et négatif.

La doctrine philosophique des Mayas,en dépit d'une grande connaissance en astronomie,présentait un même caractère naïf.

La science,en tant qu'elle cherche les explications des phéno--mènes dans la nature même,n'est apparue que dans la Grèce

antique où de nombreuses idées modernes,depuis Thalés de Milet (640 - 550 Av.J.C),considéré comme le premier physicien grec, jusqu'à Aristote (384 - 322 Av.J.C) ont été admises : l'école Ionienne parle d'une substance initiale unique à partir de laquelle se forment toutes les substances (comment ne pas penser à la notion de champ unique),la sphéricité de la Terre est pos--tulée par les Pythagoriciens,Anaxagore énonce que "Rien ne se crée ni ne se perd" (on peut y voir l'expression de la conser--vation de la masse),la théorie d'Empédocle affirme que le mouvement est conditionné par deux principes opposés : l'amour et la haine,l'un qui attire,l'autre qui repousse (étrange ana--logie avec les notions de force centripète et force centrifuge). Mais il faudra attendre des sciècles pour que ces vérités,énon--cées trop tôt,relèvent,de par une radicale transformation de la conception scientifique,du domaine de la connaissance.Car, ce qu'il y a de fondamental dans toute cette science,c'est que la théorie n'a nul besoin d'un support empirique (l'hypothèse de la sphéricité de la Terre émise par les Pythagoriciens,n'est basée sur aucune donnée expérimentale,mais se présente comme une conséquence de la loi de l'harmonie).L'idée même d'expérien--ces susceptibles de permettre l'élaboration des théories,ou de les confirmer,n'est pas pensable.Le Texte fait Autorité.Il énonce une théorie telle qu'elle satisfasse les esprits,et par là devient le référent majeur.Toutes les vérités doivent répon--dre aux exigences de ce texte.C'est ainsi que la théorie la plus séduisante et la plus achevée,la théorie d'Aristote,fut pratiquement "canonisée".

Pour Aristote il y a trois sortes de mouvements naturels

étroitement liés par leur définition même,à la structure sphé--rique et géocentrique de l'univers : les mouvements rectilignes vers le haut et le bas (la Terre est un élément dont le lieu naturel est le bas;chaque particule de Terre descend spontané--ment,c'est ce qui explique,pour Aristote,la forme sphérique de la Terre;le Feu,par contre,monte spontanément) ,et les mouvements circulaires autour du centre de la Terre;ces derniers sont les mouvements des astres,ils sont sans commencement ni fin et le problème de la causalité ne relève plus alors d'une explication physique mais d'une autre branche de la philosophie.Aristote pense que le système des mouvements n'est pas sans cause,mais dépend,en dernière analyse,d'un

> "premier moteur immobile en qui,pérennité,efficacité, intelligence et harmonie se concilient.Or,l'action de ce "premier moteur" s'exerce directement sur le ciel auquel il imprime le mouvement le plus simple qui puisse se concevoir,la rotation uniforme,qui,comme lui,est éternelle."
>
> Cosmologie du XX^{e} sciècle : J.MERLEAU PONTY

Ce "premier moteur" n'a rien à voir avec le Dieu des chrétiens, car son rôle,c'est de présider à l'ordre du monde.

> "La croyance que les mouvements circulaires se suffisent à eux-mêmes,portent en eux leur propre justification de façon qu'une recherche ultérieure qui viserait à les expliquer,serait vaine,cette croyance domine toute la première cosmologie."
>
> Cosmologie du XX^{e} sciècle : J.MERLEAU PONTY

Ainsi,au XVII^{e} scièclе,les scholastiques "raisonnaient" encore avec le célèbre "Aristoteles dixit".Tout évènement de l'ordre de l'expérience en désaccord avec le système aristotélicien, était considéré comme faux.Un curé,à qui l'on proposait de regarder les taches solaires à la longue vue,répondit en refusant "Vains efforts,mon fils,j'ai lu deux fois Aristote et je n'ai rien trouvé de semblable chez lui.Il n'y a pas de taches.Elles proviennent d'un défaut de tes verres ou de tes yeux."
Et pourtant....au XIII^{e} scièclе,Roger Bacon avait écrit :

> "Dans chaque science il faut suivre la meilleure méthode c'est à dire étudier chaque chose en bon ordre,en commençant par le commencement,en plaçant le facile avant le difficile,le général avant le particulier,le simple avant le compliqué.L'exposé doit être probant. Nous avons trois moyens de connaissance : l'autorité, le raisonnement et l'expérience;l'autorité n'enseigne pas,elle exige seulement l'accord.Quand on raisonne,on distingue le sophisme de la preuve,vérifiant la conclu--sion par l'expérience."
>
> ROGER BACON: XIII^{e} scièclе

Mais,de par l'autorité de la théorie d'Aristote,cette méthodolo--gie prématurée,n'exerça aucune influence à l'époque.
C'est ainsi que la période post-aristotélicienne rappelle le XIX^{e} scièclе où l'on pensait que tout avait été trouvé (le sys--tème d'Aristote ne pouvait plus être développé et en proposer un autre était inconcevable) ;la physique était devenue une vérité absolue.Il y eut quelques progrés dans certaines

directions mais aucune modification importante en ce qui concer--ne l'espace,le temps et la matière.Ainsi,Aristarque de Samos qui s'élevait contre le "bon sens" proposa le système héliocen--trique.Mais on n'en voulut pas.Le géocentrisme satisfaisait fort bien tout le monde,et c'est pour cette raison que quatorze sciècles plus tard,Copernic dut "redécouvrir" l'héliocentrisme.

"Lorsque sonnait son heure,la vérité a toujours trouvé un créateur."

Au Carrefour des Infinis : E.PARNOV

Cette période antique qui s'achève avec Ptolémée (70 -147 Ap.J.) a pour conséquence de longs sciècles de stérilité durant lesquels plus personne ne semblait désirer connaître.Il fallut attendre les années 700 pour que les Arabes se manifestent,mais sans rien toucher au système d'Aristote auquel ils "vouaient" un culte particulier.Va commencer alors la période de l'alchimie,et avec elle une nouvelle façon de procéder.Utilisant la notion d'expé--rience,notion introduite par Archimède (300 à 150 Av.J.C),les alchimistes vont amasser des quantités considérables de données pratiques.Mais,comme si la clarté des expériences les démysti--fiait aux yeux des non inttiés,leur enlevant leur pouvoir surnaturel,ils les masquaient dans un brouillard d'images lugu--bres et grotesques (squelettes,oiseaux terrifiants,etc...),qui ne sont en fait que des symboles de réactions chimiques.
Cette position est trés éclairante en ce qui concerne le fait que l'Antiquité n'ait pas eu besoin de l'Expérience.Il y avait d'une part la Théorie,d'autre part les expériences.La Théorie

énonçait la Vérité,d'essence supérieure,divine.Les expériences, étant à la dimension de l'homme,ne pouvaient,en aucune manière, permettre d'atteindre cette Vérité.L'idée même de chercher une preuve dans l'expérience n'était pas de l'ordre du pensable. Ce n'est qu'au Moyen Age,en Europe,au moment même où la connais--sance va se séparer de la foi,que la conception scientifique va radicalement changer.Car les Arabes,bien qu'ils aient gran--dement fait progresser l'Astronomie,l'Optique,etc...,par des mesures trés précises (table des poids spécifiques...),n'ont pas proposé,en dépit de cette base empirique trés étendue,de nouvelles conceptions philosophiques de la structure du monde. Copernic,lui,va tenter d'établir certains faits de l'ordre de la connaissance,au risque d'aller à l'encontre des croyances établies;ainsi,la découverte de son système,utilisant l'héritage de l'Antiquité mais soumettant à une réévaluation radicale les Vérités qui paraissaient le plus solidement ancrées,le contraint au silence de par la présence de l'Inquisition.C'est cette remise en cause de ces Vérités qui est fondamentale pour le propos qui nous intéresse,en ce sens qu'elle met à jour,pour la première fois,une véritable méthode : c'est l'utilisation du faux implique le faux alors que le vrai ne peut impliquer que le vrai;si ces Vérités impliquaient des propositions fausses, alors elles perdaient par là même leur caractère de vérité. C'est le début d'une ère scientifique nouvelle,et la période copernicienne peut,à juste titre,être considérée comme le com--mencement de la science moderne,science dont nous allons main--tenant tenter une approche méthodologique.

Deux façons de procéder s'offrent au physicien :

- ou bien il travaille dans l'attente,attendant que quelques manifestations de l'ordre de l'expérience se produisent,lui fournissant des matériaux à partir desquels il élabore une théorie susceptible de rendre compte de cette expérience
- ou bien il pose d'entrée de jeu de nouvelles hypothèses,aussi hardies soient-elles,permettant la construction de nouvelles théories,théories qui vont être continuellement exposées aux tests expérimentaux et par là,continuellement menacées.

> "Les théories ne peuvent être que confirmées (ou infirmées) de façon locale.Elles ne peuvent être prouvées, elles peuvent par contre être réfutées."
>
> Philosophie de la physique : MARIO BUNGE

La première de ces deux méthodes conduit à un certain mode de connaissance,la connaissance empirique,dont la possibilité relève de la perception.Mais qu'est-ce que percevoir sinon capter du signe.C'est en cela que réside toute la limitation de cette méthode,car il n'y a de signe que dans la mesure où il est repérable,c'est à dire où il est inscriptible dans un certain réseau de concepts,dans un certain champ de la connaissance.Ce qui est signe pour un observateur donné peut perdre ce caractére de signe et être NON VU par un autre observateur.Il en est ainsi du signe clinique qui "saute aux yeux" de toute personne relevant du corps médical de par le fait qu'elle se trouve en présence d'un ou plusieurs éléments repérables par rapport à certaines coordonnées,éléments qui renVOIENT à des données connues,mais qui est non vu par les non initiés en la matière.

C'est ainsi que Galilée n'aurait trés certainement pas vu,au travers de sa lunette,tout ce qu'il a rapporté,s'il n'avait été au préalable,préparé à capter tous ces signes par la théorie copernicienne.

"Sans des prémisses théoriques claires,l'expérience est aveugle."

Au Carrefour des Infinis : E.PARNOV

Le chercheur se doit donc d'opter pour la deuxième solution, (sans pour autant négliger la première) s'il ne veut pas écarter définitivement tout ce qui est en deçà,à l'extérieur du cadre déterminé par les concepts de la physique actuelle,s'il ne veut pas se condamner à ne pas VOIR.Ainsi,s'il parvient à créer de nouveaux champs d'investigations,certains éléments qui ne pou--vaient être relevés au travers des concepts antérieurs, deviendront-ils signifiants et permettrons l'élaboration d'un certain travail théorique.C'est pourquoi le chercheur doit non seulement travailler à l'intérieur de domaines pré-établis,mais créer de nouveaux lieux de recherche.Et sachant ce qu'est une création,une rupture avec ce qui précède en ce qu'elle n'est pas interprétable avec les anciens concepts,la critique d'une telle création doit s'énoncer trés prudemment;pour en parler, il faut entrer dans le nouveau champ qu'elle ouvre,il faut accepter les nouveaux concepts qu'elle propose;c'est alors,à l'intérieur de ce champ,avec ces nouveaux concepts,qu'une quel--conque critique pourra être formulée.Comment ne pas penser ici au travail de Cohen relatif au problème du Continu ! Cohen

introduit la notion d'ensembles génériques.Bien que hautement inintuitifs,ces ensembles sont réels.Ce n'est que relativement à leur existence que peuvent se formuler des objections,objec--tions qui n'affectent en rien la théorie de Cohen dans la mesure où cette confusion entre ce qui est réel et ce qui existe ne permet pas l'accés à cette théorie : les critiques ne sont alors significatives que de cette impossibilité d'entrer dans un champ nouveau.

> "Le contenu physique d'une théorie ne peut apparaître qu'au niveau de ses concepts et de ses énoncés,certai--nement pas au niveau de telle ou telle représentation des propriétés et des lois."
>
> Philosophie de la physique : MARIO BUNGE

"Ainsi,dit Bunge,une même trajectoire dans l'espace-temps peut correspondre à plusieurs équations,suivant le type de coordon--nées utilisées;lorsqu'on change de système de coordonnées,on engendre une nouvelle représentation,mais on ne modifie pas le contenu physique de la théorie."

Cette seconde démarche méthodologique consistera donc en l'éla--boration de théories compte tenu du fait que le postulat capital de la physique est l'induction : il est postulé qu'une propriété vérifiée dans un certain nombre de cas et qui n'est jamais démentie,possède un degré de probabilité en tant que vérité universelle (cf : B.RUSSEL , L'Analyse de la Matière).
Ainsi ces théories vont-elles engendrer un certain nombre d'ex--périences dont,même un résultat négatif peut être utile à la

science : le travail de Hoyle a été trés important au niveau de l'étude des modèles d'univers.Mais,dans la mesure où les conséquences de la théorie proposée sont vérifiées expérimentalement bien que sachant que le faux peut impliquer le vrai,la vérité de la théorie est de l'ordre du possible,les hypothèses ont "des chances" d'être vraies.La découverte du rayonnement à 3°K permet par là quelque espoir en ce qui concerne les spéculations relatives à l'état originel de l'Univers : si l'Univers était, dans le passé,trés condensé,il devait être rempli d'un rayonnement en équilibre thermique trés élevé dont le résidu devrait être observé actuellement,trés refroidi aprés l'expension,sous forme de radiations électromagnétiques ayant un spectre thermique à trés basse température,à 3°K.La mise en évidence de ce fond cosmique,prévu dés 1949 par Gamov,donne une certaine probabilité,au modèle proposé,d'être vrai.Il est possible alors,de remonter dans un passé trés reculé,mais pas aussi reculé que l'on pourrait le désirer,de par le phénomène des horizons,phénomène qui se manifeste aussi en ce qui concerne l'étude du Trou Noir.Ainsi des investigations expérimentales au voisinage de ces singularités,nous sont interdites.Nous ne pouvons que spéculer,mais de telles spéculations se doivent d'avoir pour but d'élargir le domaine de la connaissance en s'efforçant de proposer des interprétations susceptibles,peut-être,d'apporter des éléments nouveaux dans le champ de la physique.

Le travail présenté dans cette thèse propose une approche du problème du Trou Noir qui diffère fondamentalement de celle

de Kruskal en ce sens que nous allons suivre l'effondrement gravitationnel d'une étoile sans charge ni rotation,non plus d'un point de vue extérieur au processus (Kruskal utilise la métrique extérieure de Schwarzschild :

$$ds^2 = -(1-\frac{2M}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

métrique décrivant la géométrie du vide autour d'une masse sphérique),mais d'un autre point de vue,celui d'un observateur comobile avec l'étoile en collapse,utilisant donc,non plus la métrique extérieure de Schwarzschild,mais la métrique intérieure Le but recherché est de répondre à la question fondamentale soulevée par le théorème d'Oppeinheimer.Ce théorème montre que, au cours de l'écroulement gravitationnel,se produit un processus d'"emballement",r tend inexorablement vers zéro.Le problème essentiel est celui de savoir si cette singularité est atteinte ou non.L'étude de Kruskal,bien que s'effectuant d'un point de vue extérieur à la masse qui s'effondre,apporte une réponse à cette question : le temps mis par un observateur comobile avec la surface en effondrement pour atteindre la singularité r=o, est un temps trés court,il est fini.

La réponse proposée par le travail suivant diffère fondamentale-ment de la précédente en ce sens que la singularité r=o ne peut être atteinte qu'à l'infini du temps.Nous démontrerons donc que

LA SINGULARITE r=o N'EST JAMAIS ATTEINTE

CHAPITRE I

QUELQUES RAPPELS AU SUJET DE L'EFFONDREMENT GRAVITATIONNEL...

CE QUI EST DE L'ORDRE DE L'OBSERVABLE...

La Relativité Générale trouve localement une première applica--tion en permettant d'établir la forme de l'espace-temps autour du Soleil.Pour cela il suffit de trouver une métrique satisfai--sant aux équations du champ d'Einstein,travail effectué par Schwarzschild qui obtient ainsi la métrique de l'espace-temps à l'extérieur du Soleil,donc de toute étoile,métrique établit avec l'hypothèse suivante:l'espace-temps autour de la masse est vide:

$$ds^2 = -(1-\frac{\Lambda r^2}{3}-\frac{2m}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{\Lambda r^2}{3}-\frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

où $m = \frac{fM}{c^2}$ est la masse relativiste de l'étoile,f étant le coef--ficient d'attraction universelle,c la vitesse de la lumière.

La masse relativiste du Soleil est de 1,5 km.Dans une première approximation,il sera possible d'interpréter M comme la masse du Soleil mais en notant avec précision à quel niveau se joue l'approximation.La géométrie est riemanienne;le volume réel occu--pé par l'étoile n'est pas égal au volume de la sphère $r=R_o$(R_o, rayon du soleil)calculé dans une géométrie euclidienne;or,M est masse d'un tel volume,non celle du volume réel occupé par le Soleil Cela s'explique par le fait qu'à l'extérieur de l'étoile,la géo--métrie relève de la métrique extérieure de Schwarzschild,alors que la géométrie intérieure de l'étoile est différente:c'est une géométrie sphérique,la métrique intérieure de Schwarzschild étant donnée par:

$$ds^2 = -(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}})^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

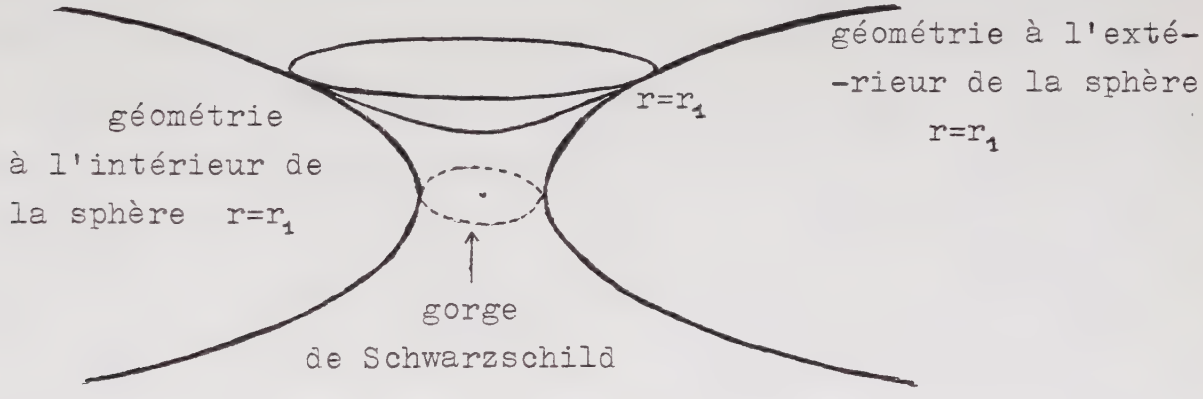
R^2 étant égal à $\frac{3}{8\pi\rho_o}$ et r_1 étant le rayon de la sphère conte-

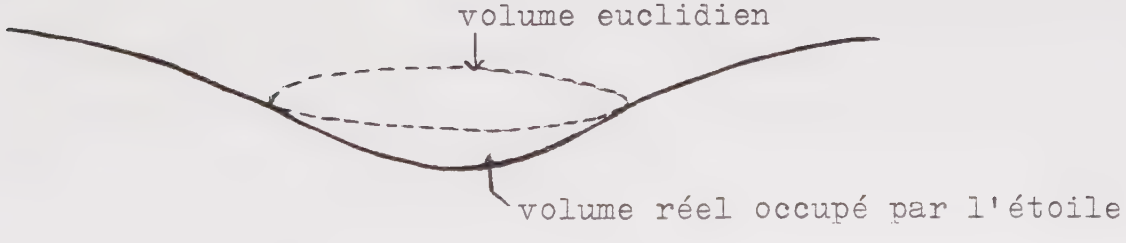
-nant la masse de l'étoile.

La partie spatiale de cette métrique représente bien la paroi à trois dimensions d'une hypersphère construite dans l'espace à quatre dimensions.Ces deux géométries,intérieure et extérieure se raccordent suivant la sphère $r=r_1$.

La représentation ci-dessous est celle d'un espace de Riemman dans une géométrie euclidienne,seule possibilité de visualiser cet espace du fait que nous n'appréhendons la forme qu'en espace euclidien.

Paraboloide de Flamm





La masse du Soleil M est de 2.10^{33} g donc son rayon de Schwarzs-
-child est de 3 km,soit plus de 230 000 fois plus petit que son

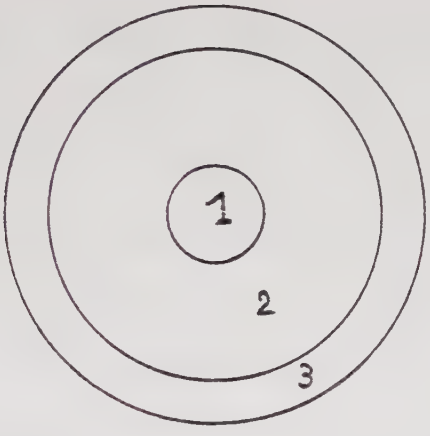
rayon.A partir de cette remarque;nous constatons que le Soleil "repose" sur les nappes du paraboloide "trés loin" de la gorge de Schwarzschild,dans une région où la courbure est un infiniment petit.Quant à l'observateur terrestre ,il est encore au-delà. Cet espace extérieur étant asymptotiquement plat,au niveau de l'observateur,tout se passe comme s'il était plat.Mais au voi--sinage de la sphère de Schwarzschild,la courbure est grande. Que se passerait-il dans le cas où le rayon de l'étoile devien--drait inférieur à son rayon de Schwarzschild ?L'étoile présen--terait un décrochage par rapport à notre univers représenté par les nappes du paraboloide.Verrait-on alors un trou dans l'uni--vers ? La réponse est non,de par les effets d'horizon du visi--ble:par un phénomène de relativité,l'observateur extérieur ne verra pas l'étoile se détacher derrière l'horizon constitué par la surface r=2m,surface en provenance de laquelle les photons mettent un temps infini à lui parvenir.Toute la question est de savoir si l'existence d'une telle étoile est de l'ordre du possi--ble.En ce qui concerne le Soleil,il faudrait qu'il s'effondre sur lui-même jusqu'à ce que sa masse soit toute entière contenue dans une sphère de 3 km de rayon.Les résultats obtenus attestent l'impossibilité pour le Soleil d'atteindre cet état là.

Les étoiles généralement observées sont en équilibre.Elles vivent une transformation d'hydrogène en hélium;lorsque l'hydrogène est épuisé,se produit alors un phénomène d'écroulement gravita--tionnel.

Prenons comme masse de référence la masse $M_\odot$ du soleil.

Si la masse de l'étoile est inférieure à 1,2 $M_\odot$,l'étoile évo--luera vers le stade de la naine blanche,sans possibilité de

modification de son état au-delà.Ce sera alors une étoile solide voire hypersolide,entourée d'une nappe de gaz brillante.Son rayon sera alors de l'ordre de 7000 km.C'est cet état de naine blanche le stade ultime de l'évolution du Soleil,état atteint lorsque sa densité sera environ $10^6 g/cm^3$.Une étoile semblable comprend trois régions de nature différente.Dans la région 1 , les forces de répulsion électrostatique sont telles que le coef-ficient de rigidité est 10^{22} fois celui de l'acier le plus rigide que l'on connaisse.La répulsion électrostatique est totale.Il n'y a aucun faisceau électronique suscep-tible de l'atténuer.Il y a là hyper-solidité.



Dans la région 2,c'est la pression de dégénérescence des électrons non relativistes qui équilibre la pression des forces gravitation-nelles,et par là,entraîne la solidité.

Seule la région 3,la partie gazeuse,est visible.Sa température est de l'ordre de 10^8 degrés:elle est donc trés blanche,caractère qui justifie,avec l'ordre de grandeur de son rayon,son appella-tion.

Les forces qui compriment la matière à l'état superdense de naine blanche,sont essentiellement les forces gravitationnelles Sur la surface de Sirius B,la gravité est environ 30 000 fois celle de la Terre.Un homme y pèserait 800 tonnes.La densité est donc telle,que la distance moyenne entre les noyaux atomiques devient inférieure au rayon de l'atome lui-même.Ainsi,dans la mesure où il ne peut y avoir interpénétration des couches élec-

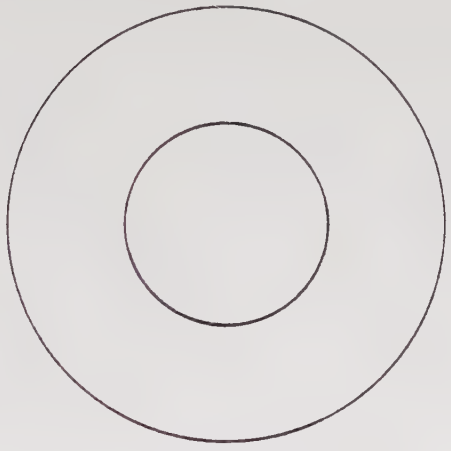
-troniques,les électrons sont arrachés des noyaux.Mais la densi--té,bien qu'énorme,n'est pas assez forte pour que tous les élec--trons soient arrachés(il faudrait,pour cela,que la distance moyenne entre les noyaux devienne égale au rayon de l'orbite la plus proche du noyau).Le gaz électronique est donc à l'état de dégénérescence ,le degré de dégénérescence diminuant depuis le centre de l'étoile,où la densité(donc la température) est maximale, jusqu'à la surface,où les atomes ne sont pas ionisés.

Si l'étoile a une masse M comprise entre $1,2M_\odot$ et $1,7M_\odot$,elle évoluera vers le stade d'étoile neutronique,avec un rayon de l'ordre de 30 km.En raison de l'importance de la masse,les den--sités atteintes sont considérables,de l'ordre de $10^{14}g/cm^3$,ce qui correspond à la densité nucléaire.Dés la valeur $10^8g/cm^3$ de la densité,la concentration des électrons dépasse 10^{32} au cm^3; l'énergie limite du gaz électronique devient alors si grande que la vitesse des électrons approche celle de la lumière. L'état des gaz électronique et nucléaire devient énergétiquement instable pour de telles valeurs de la densité et de l'énergie. Pour que l'énergie globale de l'étoile s'abaisse,il doit se pro--duire une réaction nucléaire avec capture d'électrons:

$$p^+ + e^- \longrightarrow n + \nu$$

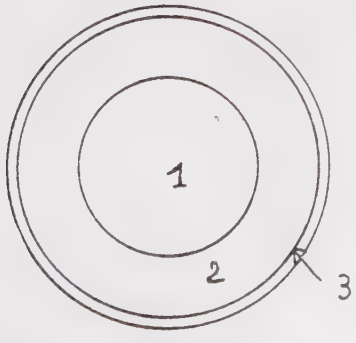
Une partie considérable des protons des noyaux sont transformés en neutrons.Un accroissement de densité entraîne une augmenta--tion du nombre de neutrons et une diminution de la réserve de protons et d'électrons.Les neutrons s'écroulent les uns sur les autres en raison de l'absence de répulsion électrostatique.C'est alors un superfluide de neutrons.Cette étoile neutronique n'est

pas visible directement,n'étant plus entourée,comme l'était la naine blanche,d'un gaz brillant,mais elle donne néammoins du signe.En effet le flux d'électrons relativistes va s'enrouler autour des deux pôles magnétiques de l'étoile,provoquant ainsi un intense rayonnement syncroton,observable sous forme de pul--sations car l'étoile tourne autour de son axe qui n'est pas nécessairement son axe électromagnétique.Il est possible de cal--culer la période d'un tel pulsar.L'étoile à neutrons tourne en une fraction de seconde sur elle-même.



Dans le cas de la naine blanche,la pression des électrons était suffi--sante pour équilibrer l'étoile.Pour l'étoile à neutrons,c'est celle des noyaux.

Quelle est donc la limite de la den--sité des étoiles ? Le savant sovié--tique V.A.Ambartsoumian considére qu'il peut exister des densités aussi fortes que l'on veut,inhérente à un état particulier,préstellaire,de la matière.Une augmentation de la densité entraîne la formation d'hypérons.Au delà de $10^{15} g/cm^3$,une partie des neutrons se trans--forme en hypérons,entraînant une diminution de l'énergie globa--le.Une telle étoile hypéronique est formée de trois régions de nature différente.La région 1,conte--nant la presque totalité de la masse est constituée essentiellement d'hypé--rons,de nucléons,de pions;



La partie 2 est formée de neutrons,partie entourée par la troi-
-sième région constituée de noyaux nus et d'électrons,dont l'é-
-paisseur est trés faible,seulement quelque mètres.
LOrsque la masse de l'étoile est supérieure à $1{,}7M_\odot$,alors se produit le stade ultime de l'écroulement gravitationnel:c'est le Trou Noir.Comment prévoir les évènements susceptibles de se dérouler lorsque M est supérieure à $1{,}7M_\odot$? La mécanique classi-
-que,avec la théorie newtonienne,ne permet aucune conclusion,et cela en raison de l'équation de Poisson.En effet,cette équation $\Delta\Psi = -4\pi\rho$ met en évidence le fait que lorsque le collapse com-
-mence,entraînant une augmentation de la densité ,alors le po-
-tentiel Ψ croît;se présente alors la possibilité d'états phy-
-siques inconnus où interviennent des pressions antagonistes contrebalançant la gravitation.Rien ne permet de conclure quant à l'existence ou la non existence de tels états.La Relativité Générale va pouvoir conclure.Elle introduit,en effet,une diffé-
-rence fondamentale relativement à la mécanique classique,à savoir que la densité n'est plus la seule source de potentiel: les pressions y interviennent:

$$\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}R - R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}\, T_{\mu\nu}(p,\rho)$$

Le tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ est fonction,non seulement de ρ mais de p.Donc,les pressions vont contribuer à cet écroulement. Oppenheimer démontre que pour M superieur à $1{,}7M_\odot$,se produit un processus d'"emballement":aucun état d'équilibre ne peut exister Ainsi,r tend inexorablement vers zéro.
Mais tout ce processus nous échappe visuellement en ce qu'il

s'effectue au-delà de notre horizon du visible.Bien qu'échappant à l'ordre de la vision,le Trou Noir est,et par son être,il effectue un forçage sur ce qui l'entoure,obligeant l'autre à donner du signe,à donner le signe de sa présence à lui.
C'est à ce niveau qu'intervient l'importance de la théorie,dans la mesure où tout l'espoir de mise en évidence d'un Trou Noir réside dans l'existence de l'Autre dans son voisinage,de cet Autre qui attestera par son comportement de la présence du Trou Noir.Il faut donc avoir la possibilité de repérer les signes fournis,de les interpréter,de les codifier;c'est cette possibi--lité même q'offre la théorie établie au préalable.
Ainsi,les astronomes,en observant Cygnus X_1,ont constaté qu'il s'agissait d'une supergéante présentant les caractéristiques d'un partenaire d'une étoile double spectroscopique;elle gravite autour d'un centre et,par effet Doppler,les raies spectroscopi--ques oscillent du bleu vers le rouge.Quant à l'autre partenaire celui qui justifie le comportement de la supergéante,il est invisible,et connaissant la période d'oscillation,nous pouvons en déterminer la masse qui est de l'ordre de 10 $M_\odot$ .La super--géante est entourée de nappes de gaz,donc à chaque instant une certaine quantité de ce gaz va tomber dans le puit de potentiel crée par son partenaire,précipitant les particules.Cet hydrogène trés chaud,en raison de la présence de ce puit de potentiel, donne un trés fort rayonnement synchroton,rayonnement qui déter--mine l'étoile comme une radio-source,ainsi qu'un trés fort rayonnement X qui la présente à l'observateur comme une source X, la plus forte source X observée jusqu'à présent.Et c'est cette observation du rayonnement X qui est décisive relativement à la

conclusion de la présence d'un Trou Noir.En effet,apparaissent des variations dans le rayonnement X,variations dues au fait que la quantité de gaz qui tombe dans le puit de potentiel n'est pas constante.Pendant une durée θ on observe une"pointe" dans le rayonnement.

Il est possible de mesurer cette durée θ de ce flash qui éclaire alors le disque,image du partenaire invisible.Le diamètre d de ce disque est égal à $c\theta$.Les calculs permettent d'obtenir le résultat suivant,à savoir que d est de l'ordre de 2m.Ainsi ces deux résultats,d'une part que le rayon du disque est de l'ordre du rayon de Schwarzschild de la masse du partenaire invisible, d'autre part que cette masse est égale,environ,à 10 $M_\odot$,permet--tent d'affirmer qu'il s'agit bien d'un Trou Noir,affirmation qui n'aurait pu être avancée sans support théorique.

La question qui nous intéresse relativement à ce phénomène est celle soulevée par Oppenheimer : à l'intérieur d'un tel Trou Noir,aucun état d'équilibre ne peut exister,r tend inexorable--ment zéro.Mais qu'en est-il de cette limite ? Est-elle effec--tivement atteinte ? En d'autres termes,l'effondrement gravita-tionnel peut-il être total,toute l'étoile se trouvant "écrasée" en r=o,à un certain instant t ?
Nous allons tenter,dans les chapîtres suivants,de répondre à cette question.

CHAPITRE II

QU'EN EST-IL DES "SINGULARITES" DANS LES METRIQUES DE SCHWARZSCHILD ?

1) Une première remarque relative à la métrique exté--rieure de Schwarzschild...

2) En ce qui concerne la métrique intérieure...

3) Processus interne de l'écroulement gravitationnel..

4) Caractère intrinsèque et non intrinsèque des pathologies...

II QU'EN EST-IL DES"SINGULARITES"DANS LES METRIQUES DE SCHWARZCHILD ?

1) Une première remarque relative à la métrique extérieure de Schwarzchild...

$$(II\,1) \qquad ds^2 = -(1-\frac{2m}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

Cette métrique présente une pathologie en r=2m : le coefficient de dt^2 s'y annule et celui de dr^2 y devient infini.

Nous savons que cette pathologie n'est en fait pas une patholo-gie de l'espace-temps,mais est liée au choix de la métrique. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la chute libre et radiale d'un observateur sur la sphère de Schwarzchild.Les forces gravitationnelles senties par cet observateur lorsqu'il atteint une valeur donnée r du rayon,sont mesurées par les com-posantes du tenseur de Riemann dans le repère orthonormé lié à l'observateur. .Dans une première étape nous calculons ces coordonnées,non pas dans le repère du voyageur,mais dans le repère statique orthonormé.Les composantes $R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$ sont données par la matrice :

$$R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bar{E} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bar{E} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & F & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{F} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{F} \end{pmatrix} \begin{matrix} tr \\ t\theta \\ t\varphi \\ \theta\varphi \\ \varphi r \\ r\theta \end{matrix}$$

où $E=-e^{-2\Lambda}(\Phi''+\Phi'^2-\Phi'\Lambda')$ $\qquad \bar{F}=\frac{1}{r^2}(1-e^{-2\Lambda})$

$\bar{E}=-\frac{1}{r}\,e^{-2\Lambda}\Phi'$ $\qquad \bar{\bar{F}}=\frac{1}{r}e^{-2\Lambda}\Lambda'$

CF :Gravitation. MISNER,THORNE ET WHEELER

La métrique s'écrivant :

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

On obtient donc:

$$R^{tr}{}_{tr} = E \qquad R^{t\theta}{}_{t\theta} = \bar{E} \qquad R^{t\varphi}{}_{t\varphi} = \bar{E}$$

$$R^{\theta\varphi}{}_{\theta\varphi} = F \qquad R^{\varphi r}{}_{\varphi r} = \bar{F} \qquad R^{r\theta}{}_{r\theta} = \bar{F}$$

Ce qui permet de calculer les coordonnées $R_{\mu\nu\alpha\beta}$

Par exemple:

$$R^{tr}{}_{tr} = g^{t\mu}g^{r\nu}R_{\mu\nu tr} = g^{tt}g^{rr}R_{trtr}$$

Donc: $$R_{trtr} = -e^{2\Phi}e^{2\Lambda}E$$

Dans le cas de la métrique extérieure de Schwarzchild

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2m}{r} \quad \text{et} \quad e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}$$

nous obtenons les résultats suivants:

$$R_{trtr} = -\frac{2m}{r^3} \qquad R_{t\theta t\theta} = R_{t\varphi t\varphi} = \frac{m}{r^3}$$

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = \frac{2m}{r^3} \qquad R_{r\theta r\theta} = R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{m}{r^3}$$

Toutes les autres composantes s'annulent exceptées celles obte--nues par les symétries de Riemann.

Pour obtenir ces mêmes composantes exprimées dans le repère lié à l'observateur,il suffit d'appliquer un changement de va--riables de Lorentz dans la direction e_r avec la vitesse ordinai--re v^r.Une conséquence des propriétés algébriques spéciales de la géométrie de Schwarzchild est que ces composantes ne sont pas affectées par un tel changement de variables.Elles ont la même valeur dans le repère de l'observateur.Ainsi,les forces gravitationnelles qu'il sent,sont-elles finies,à l'approche de

r=2m,à condition,bien évidemment,que la masse m soit suffisam--ment grande car en r=2m les composantes non nulles du tenseur de courbure de Riemann sont de l'ordre de $\frac{1}{m^2}$.

Ce bref rappel en ce qui concerne la notion de "singularité" (de plus amples précisions sont données dans le texte de MISNER, THORNE et WHEELER : Gravitation) n'a pour but que de repréciser ce qu'il en est,d'un point de vue physique,des singularités;il n'était pas nécessaire d'un point de vue mathématique en ce sens qu'il suffit,pour affirmer qu'une pathologie est inhérente à la métrique et non pas à l'espace-temps,de trouver une nouvel--le métrique dans laquelle elle ne joue plus un rôle critique, métrique obtenue à l'aide d'un changement de variables adéquat (C^∞). Ainsi la région r=2m n'est pas une région singulière de l'espace temps,ce qui est cohérent avec le fait suivant,que nous allons mettre en évidence grâce à la métrique intérieure de Schwarschild à savoir que cette pathologie r=2m n'est q'un cas particulier d'une pathologie plus générale,non intrinsèque.

2) En ce qui concerne la métrique intérieure...

Considérons une étoile telle que l'espace-temps à l'intérieur de cette étoile soit décrit par la métrique intérieure de Schwarzschild :

$$(\text{II } 2) \qquad ds^2 = -\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\Psi^2$$

où R^2 est défini par :

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho_0} \qquad \text{et} \qquad m = \frac{4\pi}{3} r_1^3 \rho_0$$

m et ρ_o étant mesurés en unités relativistes.

Quelle que soit la valeur de r_1, cette métrique présente une singularité intrinsèque, la singularité r=o, qui apparaît dans les coefficients de $d\theta^2$ et $d\varphi^2$, singularité due à la position centrale du point O dans la symétrie sphérique de l'espace-temps (nous reviendrons avec plus de précision sur ce sujet ultérieu--rement). Dés que r_1 devient égal ou inférieur à $\frac{9}{4}m$, la partie radiale de l'écriture de la métrique se comporte de façon singu--lière au voisinage de la (ou les) valeur de r annulant le coef--ficient de dt^2 soit la (ou les) solution de l'équation :

$$\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}$$

Soit :

$$r^2 = 9r_1^2 - 8R^2$$

Seule la solution non négative est à retenir. Nous appellerons "pathologie intérieure" cette valeur de r et nous noterons :

(II 3) $$\boxed{r_{path} = (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Elle annule le déterminant de la métrique pour toutes les valeurs de r_1 telles que R^2 soit différent de r^2 :

$$g = -\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{r^2}{R^2}} \times r^4 \sin^2\theta$$

Ce n'est pas, comme nous le verrons par la suite, une singularité de l'espace-temps: il est possible de l'éliminer par un changement de variables adéquat.

Que se passe-t-il lorsque $R^2 = r^2$?

$$r^2 = R^2 \iff r^2 = \frac{r_1^3}{2m}$$

La relation $r^2 = 9r_1^2 - 8R^2$ s'écrit alors :

$$9r_1^2 = 9R^2 \iff r_1^2 = R^2 \iff r_1^2 = \frac{r_1^3}{2m} \iff r_1 = 2m$$

Donc $R^2 = 4m^2$, ainsi $r = 2m$.

C'est le rayon de Schwarzschild qui se présente comme un cas particulier de la pathologie intérieure r_{path} .

Lorsque $r_1 = \frac{9}{4}m$,la différence $9r_1^2 - 8R^2$ s'annule,et r_{path} vient se confondre avec la singularité initiale.

En résumé,les pathologies intrinsèque et non intrinsèque, $r = o$ et $r = 2m$,correspondent à des valeurs particulières de la pathologie intérieure :

"Pathologie intérieure" : $r_{path} = (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$

- $r_1 = 2m \Rightarrow r = 2m$: rayon de Schwarzschild
- $r_1 = \frac{9}{4}m \Rightarrow r = o$: singularité initiale

Nous nous proposons d'étudier ce qu'il se passe entre ces deux valeurs de r_1 , $r_1 = \frac{9}{4}m$ et $r_1 = 2m$.

Au regard de la physique actuelle,la limite de validité de cette métrique est $r_1 = \frac{9}{4}m$ .En effet,la pression centrale de l'étoile devient infinie lorsque m, r_1 et $\frac{2m}{r_1}$ atteignent les valeurs limites

$$\begin{cases} r_1 = \frac{9}{4}m = (3\pi\rho_o)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{2m}{r_1} = \frac{8}{9} \end{cases}$$

Pour s'en convaincre,il suffit de considérer l'équation d'équi-libre hydrostatique et les équations de masse :

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(M + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2M)} \quad \text{avec} \quad p(r=o) = p_c = \text{pression centrale}$$

$$M = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 & \text{pour } r < r_1 \\ m = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r_1^3 & \text{pour } r > r_1 \end{cases}$$

Nous pouvons alors intégrer l'équation d'équilibre hydrostatique et nous obtenons :

$$(II\,4) \qquad p_c = \rho_0 \left[\frac{1-(1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}}{3(1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}-1} \right]$$

Elle devient infinie pour la valeur de r qui annule le dénomi--nateur, c'est-à-dire :

$$3(1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} = 1 \iff 1-\frac{2m}{r_1} = \frac{1}{9} \iff \frac{2m}{r_1} = \frac{8}{9}$$

Or : $\frac{2m}{r_1} = \frac{8\pi}{3}\rho_0 r_1^2$ donc $r_1 = \frac{9}{4}m = (3\pi\rho_0)^{-\frac{1}{2}}$

C'est le moment précis où commence l'implosion de l'étoile. A partir de cette valeur, la physique nous "échappe". C'est pourquoi nous ne donnerons désormais aucune interprétation physique à R^2 et le définirons simplement par :

$$R^2 = \frac{r_1^3}{2m} \quad (= \frac{3}{8\pi\rho_0} \text{ , où } \rho_0 \text{ est une constante, pour } r_1 \text{ donné}$$

et nous continuerons à appeler "pression", mais nous y mettrons des guillemets, la quantité définie par :

$$(II\,5) \qquad p = \rho_0 \left[\frac{(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}-(1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}}{3(1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}-(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}} \right) \qquad)$$

Quant à la valeur $r_1 = 2m$, elle correspond à la limite de validité d'un point de vue mathématique: en effet, le coefficient de dt^2

$(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}})^2$,n'est plus défini pour $1-\frac{r_1^2}{R}<0$ c'est-à-dire pour $r_1 < 2m$ .Ainsi,ces deux valeurs particulières,r=o et r=2m, de la pathologie intérieure,correspondent à deux valeurs limites pour la métrique intérieure de Schwarzschild:

- la première, $r_1 = \frac{9}{4}m$,est la limite de validité d'un point de vue physique,de cette métrique.

- la deuxième, $r_1 = 2m$,en est la limite de validité d'un point point de vue mathématique.

C'est dans l'intervalle borné par ces deux valeurs que nous allons porter nos investigations,en "suivant" l'effondrement de l'étoile depuis la valeur de r_1 égale à $\frac{9}{4}m$ jusqu'à la valeur 2m.

3) Processus interne de l'écroulement gravitationnel...

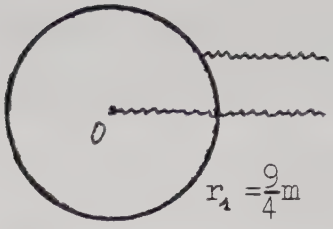
Lorsque r_1 atteint la borne supérieure de l'intervalle $\frac{9}{4}m$,la pression centrale de l'étoile devient,comme nous l'avons consta--té précédemment,infinie.C'est précisément le moment où le centre de l'étoile présente un décalage spectral z_c infini.En effet, nous savons que le décalage spectral du rayonnement en prove--nance d'un point situé à l'intérieur de la sphère de rayon r_1 à la distance r du centre (en supposant que l'on puisse rece--voir à un même instant un rayonnement d'un point situé sur le bord de l'étoile et du point considéré) est donné par :

$$(II\,6) \qquad 1 + z = \frac{1}{\frac{3}{2}(1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}}$$

Ainsi,le décalage spectral z_c ,correspondant au cas où r=o,est

égal à :

$$(II\,7) \qquad 1+z_c = \frac{1}{\frac{3}{2}(1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}$$



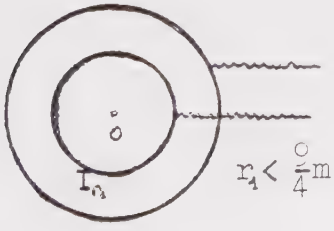
Il devient infini pour $r_1 = \frac{9}{4}m$.

Considérons maintenant le décalage spectral du rayonnement en provenance d'un point situé à l'intérieur de la sphère de rayon r_1, à une distance r de son centre, pour r_1 inférieur à $\frac{9}{4}m$. Il est donné par la formule (II 6). Le dénominateur de cette expression s'annule pour :

$$r^2 = 9r_1^2 - 8R^2$$

L'ensemble des points situés à la distance $r = (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$ du centre, c'est-à-dire la sphère que nous appellerons I_{r_1}, est tel que chacun de ses éléments correspond à un décalage spectral infini. Cette sphère I_{r_1} est l'image de la pathologie intérieure Ainsi la pathologie intérieure est le lieu des points en provenance desquels le rayonnement présente un décalage spectral infini pour la valeur de r_1 correspondante.

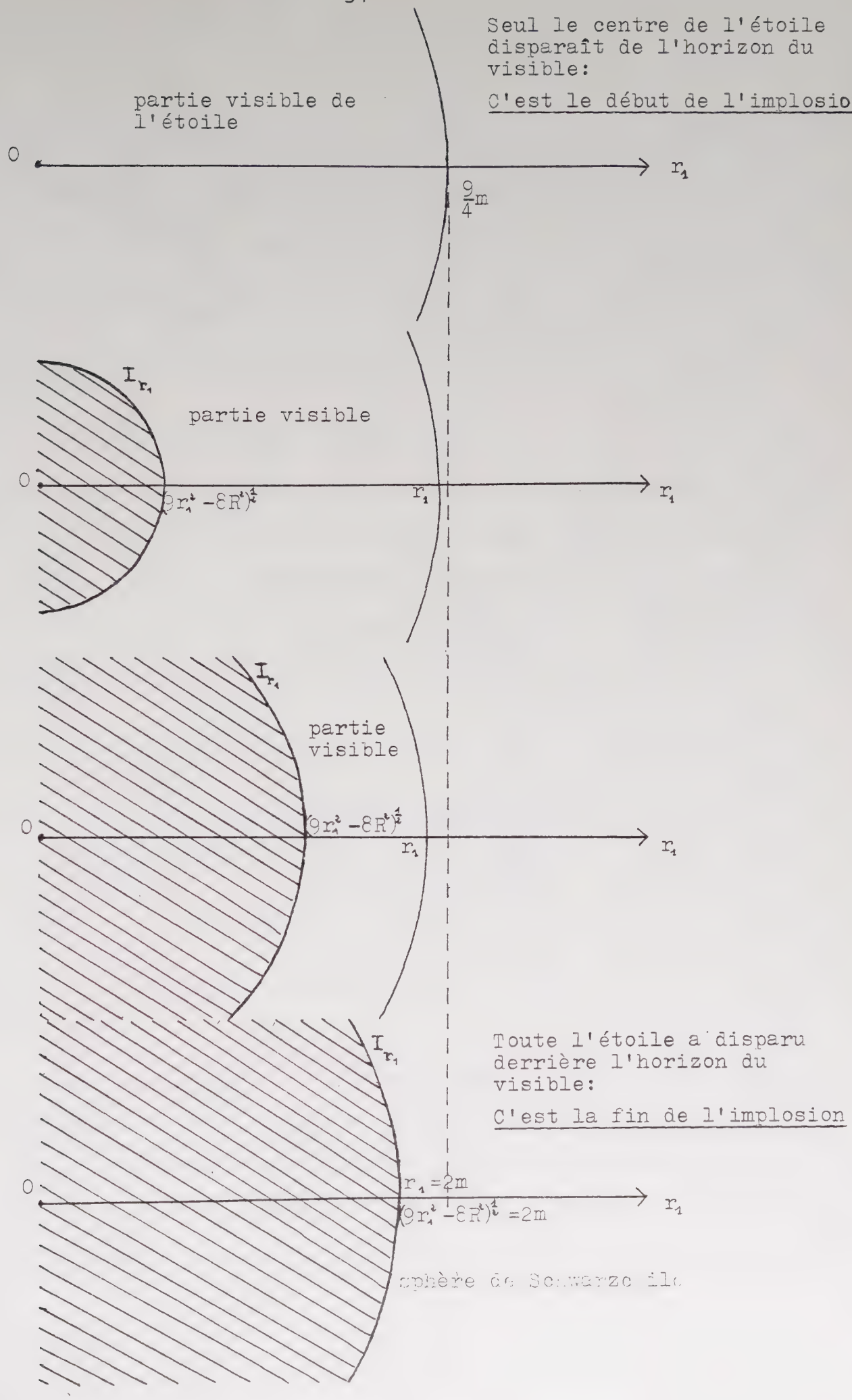
Ainsi, au fur et à mesure que r_1 décroît de la valeur $\frac{9}{4}m$ à la valeur 2m, le rayon $r=(9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$ de la sphère I_{r_1} croît (car $9r_1^2 - 8R^2$ est égal à $9r_1^2 - 8\frac{r_1^3}{2m}$) de la valeur o à la valeur 2m; la sphère I_{r_1} devient de plus en plus "grosse" (à la manière d'un ballon que l'on gon-fle) depuis l'état de sphère-point 0 jusqu'à atteindre la sphè-re de Schwarzchild lorsque r=2m : c'est la fin du processus.



Nous pourrions imaginer une étoile telle que le rayonnement en provenance de tout point situé à l'intérieur de cette étoile puisse nous atteindre. Nous constaterions alors, en en suivant l'écroulement gravitationnel, que toute l'étoile est dans le domaine du visible pour r_1 supérieur à $\frac{9}{4}m$ (en effet, le dénominateur du second membre de l'expression (II 6) est strictement positif); lorsque r_1 atteint la valeur $r = \frac{9}{4}m$ le centre de l'étoile disparaît de notre horizon du visible, et au fur et à mesure de l'écroulement, disparaissent progressivement, de façon continue, des sphères dont le rayon est de plus en plus grand, jusqu'à atteindre la valeur 2m, valeur pour laquelle l'étoile toute entière échappe à notre champ visuel.

Nous allons schématiser sur la page suivante, le processus que nous venons de décrire, en hachurant la région de l'étoile qui se trouve derrière notre horizon du visible.

Cette représentation est une représentation "d'espace" : il s'agit de coupes à t=cte d'un plan contenant le point O, que nous appellerons Π.


Seul le centre de l'étoile disparaît de l'horizon du visible:
C'est le début de l'implosion
partie visible de l'étoile
0
r_1
$\frac{9}{4}m$
I_{r_1}
partie visible
$(9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$
r_1
partie visible
Toute l'étoile a disparu derrière l'horizon du visible:
C'est la fin de l'implosion
$r_1 = 2m$
$(9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}} = 2m$

Nous pouvons suivre l'évolution du rayon $y(r_1)=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$ de la sphère I_{r_1} qui disparaît de l'horizon du visible en fonction de r_1 :

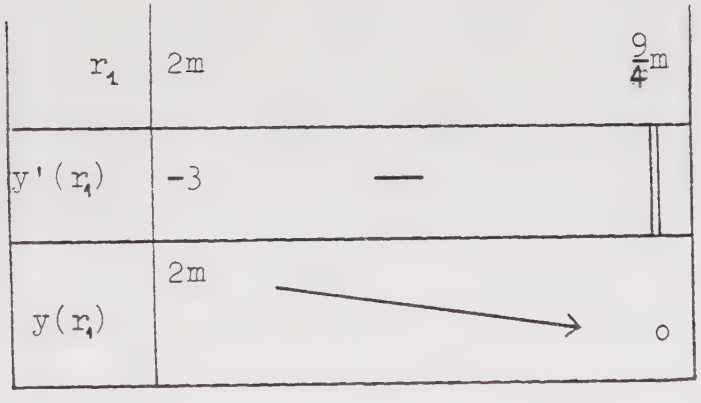
$$R^2 = \frac{r_1^3}{2m} \quad \Longrightarrow \quad y(r_1)=(9r_1^2-\frac{4r_1^3}{m})^{\frac{1}{2}}$$

Etudions le signe du nombre dérivé $y'(r_1)$:

$$y'(r_1)= \frac{1}{2}(-\frac{12r_1^2}{m}+18r_1)(9r_1^2-\frac{4r_1^3}{m})^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'(r_1)=3r_1(-\frac{2r_1}{m}+3)(9r_1^2-\frac{4r_1^3}{m})^{-\frac{1}{2}}$$

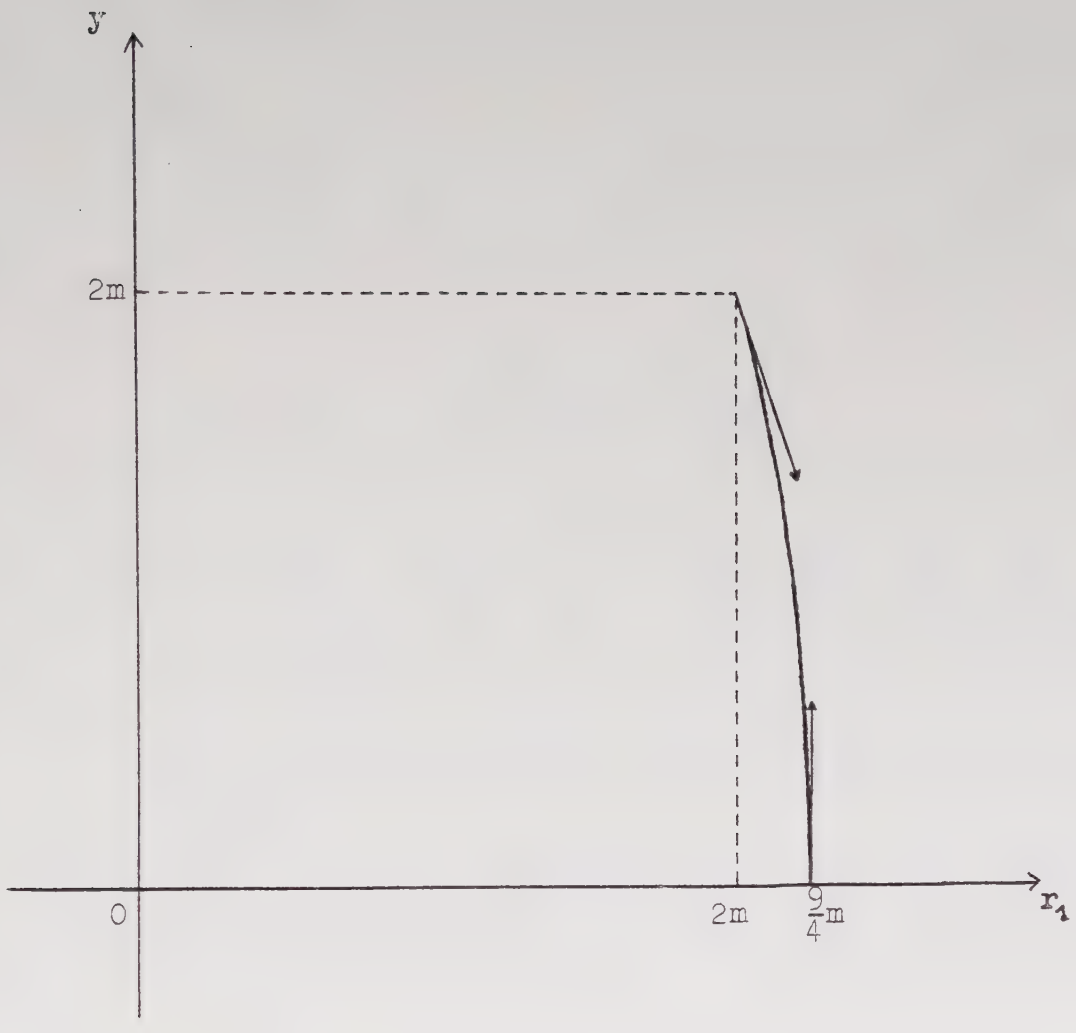
Le facteur $(9r_1^2-\frac{4r_1^3}{m})^{-\frac{1}{2}}$ est positif pour r_1 appartenant à l'inter-valle $[2m,\frac{9}{4}m[$, il n'est pas défini pour $r=\frac{9}{4}m$; quant au facteur $(-\frac{2r_1}{m}+3)$, il est négatif dans l'intervalle $[2m,\frac{9}{4}m]$. Ainsi la dérivée y' est, dans le domaine $[2m,\frac{9}{4}m[$, une fonction à valeurs négatives. Elle prend la valeur -3 pour $r=2m$.



Cette étude met en évidence une remarque fondamentale, à savoir l'existence d'une tangente verticale à la courbe représentative de la fonction y au point $A(\frac{9}{4}m,o)$. En effet, le nombre dérivé $y'(r_1)$ tend vers l'infini lorsque r_1 tend vers $\frac{9}{4}m$.

NOus allons donner la représentation graphique de cette fonction

dans un repére orthonormé :



Remarque 1

Si nous suivons l'écroulement gravitationnel de l'étoile depuis la valeur de r_1 égale à $\frac{9}{4}m$ jusqu'à la valeur $r_1 = 2m$, nous constatons que le processus débute à l'image d'une ex--plosion à l'intérieur de l'étoile,la fonction y présentant un taux d'accroissement infini au départ,au point A de coor-

-nées $(\frac{9}{4}m, o)$. Ainsi se trouve pleinement justifié le terme d'"implosion".

Remarque 2

La valeur de la "pression" en un point situé à la distance $r < R$ du centre O est donnée par l'expression:

$$p = \rho_o \left[\frac{(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} - (1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}}{3(1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} - (1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}} \right]$$

ρ_o étant une constante définie par $\frac{3}{8\pi\rho_o} = \frac{r_1^3}{2m}$, pour r_1 donné
Cette expression, pour tout $r \in]2m, \frac{9}{4}m]$, s'annule sur la surface de la sphère de rayon r_1, et elle est infinie en $r=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$ c'est-à-dire sur la sphère I_{r_1} correspondant à la pathologie intérieure.
La variarion de cette "pression" du centre de l'étoile à la surface, est déterminée par le nombre dérivé p':

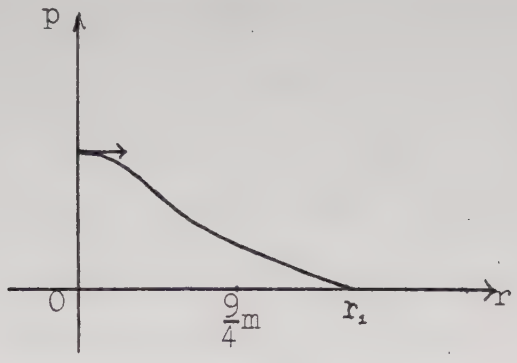
$$p' = -\rho_o \frac{\frac{2r}{R^2}(1-\frac{r^2}{R^2})^{-\frac{1}{2}}(1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}}{\left[3(1-\frac{r_1^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} - (1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

Quel que soit $r, r \in [o, r_1]$, p' est, dans le domaine où il est défini, négatif ou nul.
Nous allons scinder l'étude de la fonction "pression" en quatre cas:

Premier cas : $r_1 > \frac{9}{4}m$

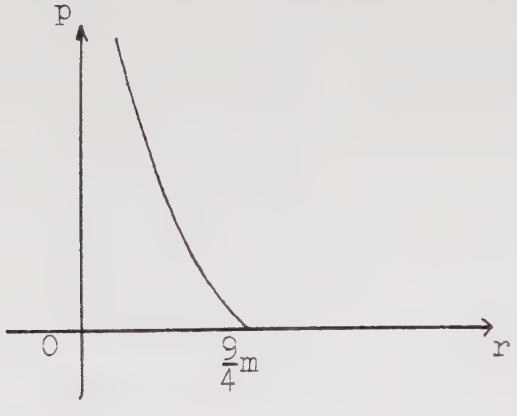
La pression décroît du centre de l'étoile où elle prend la

valeur p_c , $p_c > 0$, jusqu'à la surface où elle s'annule.



Second cas : $r_1 = \frac{9}{4}m$

C'est le début de l'implosion; la pression au centre de l'étoile devient infinie, restant finie partout ailleurs.



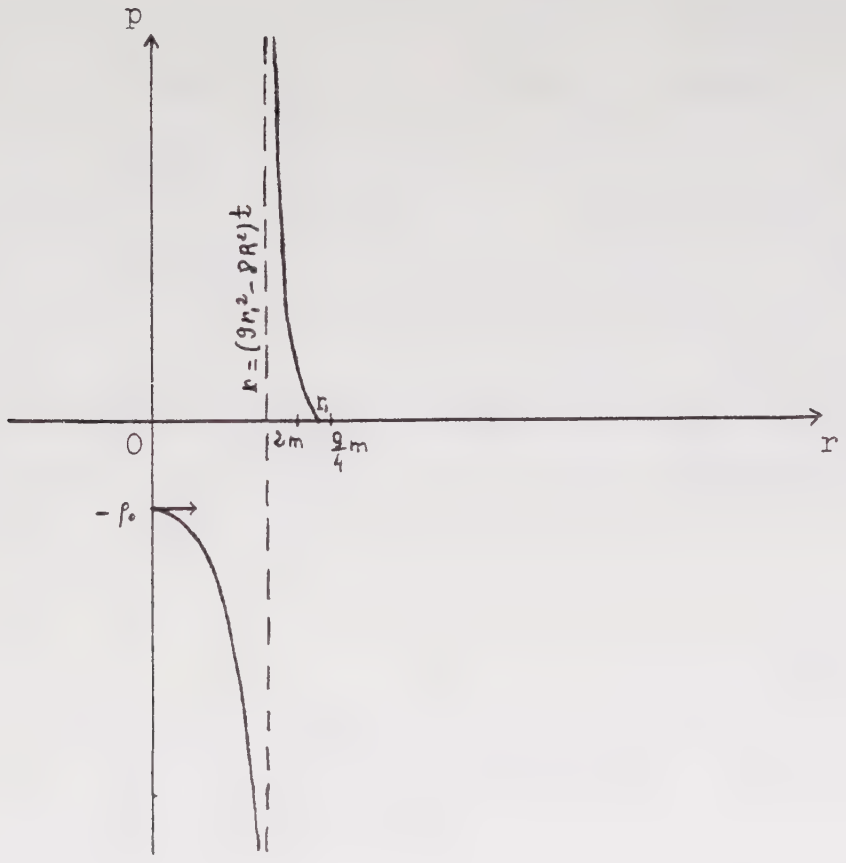
Troisième cas : $r_1 \in]2m, \frac{9}{4}m[$

Nous allons donner le tableau de variation de la fonction "pression". Elle n'est pas définie en $r = (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$.

r	0	$(9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$	r_1
p'	0 —		—
p	p_c ↘	$-\infty$ || $+\infty$ ↘	0

Ainsi,la sphère I_{r_1},lieu des points en provenance desquels le décalage spectral est infini,est également l'ensemble des points où la "pression" est infinie.Cette propriété était vérifiée dans le cas précédent,cas où la sphère I_{r_1} n'était autre que la sphère point O.Nous pouvons donc énoncer:
<u>la "pathologie intérieure" pour $r \neq 2m$,est le lieu des points où la "pression" devient infinie.</u>

La représentation graphique de cette fonction,dans ce troi-sième cas est donnée par le diagramme suivant:



Ce qu'il y a de fondamental et de surprenant ici,c'est l'apparition,pour $r < (9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$,d'une "pression" négative. Nous limitons pour l'instant la remarque à une constatation

de fait et nous proposerons ultérieurement,aprés l'étude du dernier cas ($r_1 = 2m$),une intérprétation de ce phénomène.

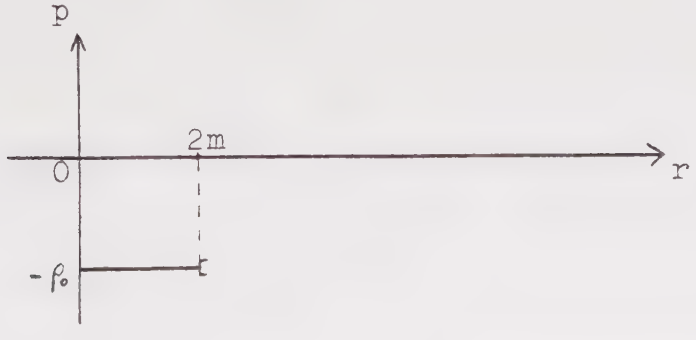
Quatrième cas : $r_1 = 2m$

La "pression" ne s'annule plus à la surface de la sphère de rayon $r_1 = 2m$;en effet,elle n'est pas définie pour $r = 2m$.

$$p = \rho_0 \frac{\left[(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$p = -\rho_0$ pour $r^2 \neq R^2$ c'est-à-dire $r \neq 2m$

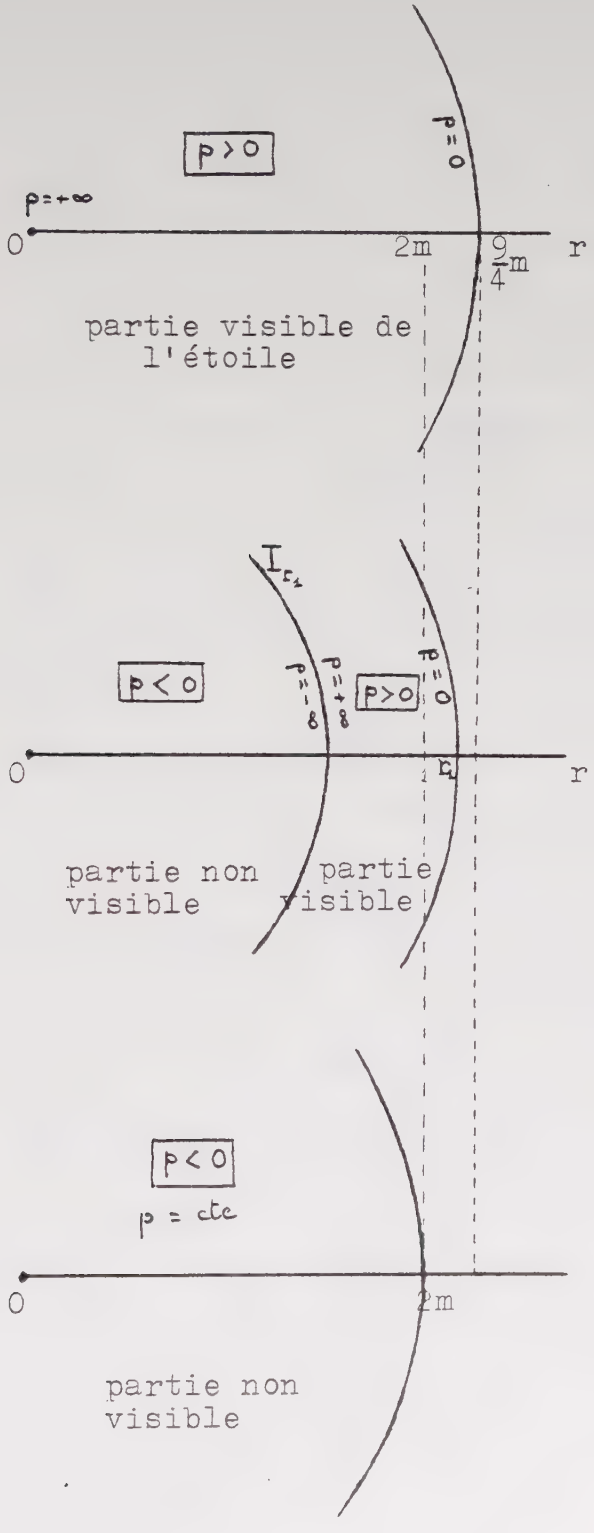
A la surface de cette sphère (sphère de Schwarzchild),non seulement le numérateur de l'expression donnant p s'annule mais aussi le dénominateur.Ceci est dû au fait que dans ce cas,la sphère contenant l'étoile (lieu des points pour les -quels le numérateur s'annule) et la sphère I_{r_1} correspon--dant à la pathologie intérieure,(lieu des points pour lesquels le dénominateur s'annule),sont confondues.Ainsi, contrairement aux deux cas précédents,la "pression" ne tend pas vers l'infini lorsque r tend vers r_1 .

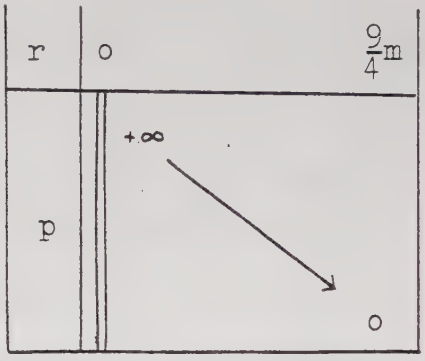


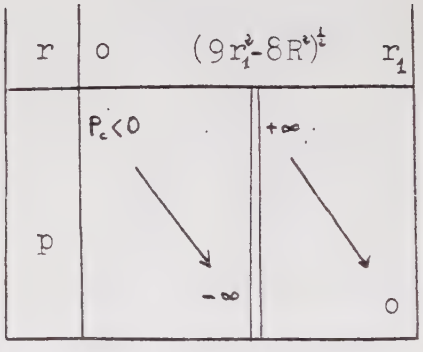
La "pression" est maintenant constante à l'intérieur de la sphère de rayon $r = 2m$,et cette constante est négative:elle

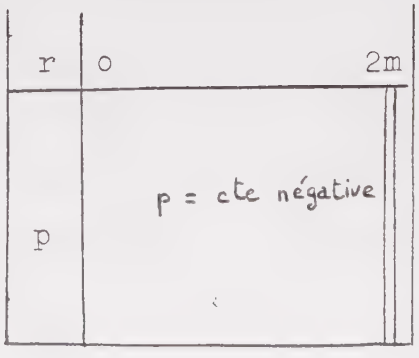
est égale à $-\rho_0$, avec $\frac{3}{8\pi\rho_0} = 4m^2$ soit $\rho_0 = \frac{3}{32\pi m^2}$

Nous pouvons schématiser ce qu'il en est de la "pression" au cours du collapse dans le plan π défini p.34 :









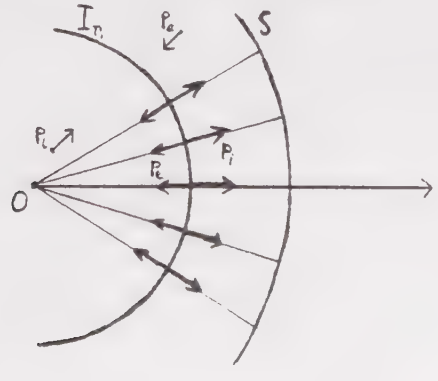
Ces représentations mettent en évidence la correspondance entre partie visible de l'étoile et "pression" positive, partie non visible et "pression" négative.

Interprétation du phénomène $p < o$

Au cours de l'écroulement gravitationnel depuis la valeur $\frac{9}{4}m$ jusqu'à la valeur 2m, c'est d'abord le centre de l'étoile qui, "simultanément" à sa disparition de l'horizon du visi-ble, devient le lieu d'une pression infinie; cette valeur infinie de la "pression" s'installe sur les surfaces I_{r_1}, au fur et à mesure qu'elles échappent au domaine du visible. A l'intérieur de ces surfaces, les "pressions" prennent des valeurs négatives, restant positives à l'extérieur. Lorsque I_{r_1} vient se confondre avec la sphère de Schwarzschild, la pression est alors partout négative à l'intérieur de cette sphère.

Comment interpréter ce signe "moins" dont la réalité relè-ve de la mathématique?

Au cours du collapse, la surface de la sphère I_{r_1} est soumise à deux types de poussées, l'une dirigée vers le centre de l'étoile (p_e), due à son effondrement, l'autre, (p_i), dirigée en sens inverse, caractérisant le phénomène d'implosion qui tend à dilater la sphère .



Ce schéma n'est repré-sentatif que du sens dans lequel s'exercent les "pressions", sans pren-dre en considération les valeurs absolues.

Ainsi p_i,ayant un sens contraire à celui de la pression dans une étoile,est-il affecté mathématiquement d'un signe "moins".

Les processus d'écroulement et d'implosion tendent à amener les deux surfaces,la surface de la sphère S et celle de la sphère I_{r_1},à se confondre en une seule et même sphère,la sphère de Schwarzschild,limite d'un lieu de"pression"nulle et d'un lieu de"pression"infinie,ce qui explique le fait qu'à la fin du processus,la"pression"sur la surface de cet--te sphère soit indéterminée:

$$p_i = -\rho_0 \frac{(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}}{(1-\frac{r^2}{R^2})^{\frac{1}{2}}}$$

Le numérateur et le dénominateur sont deux infiniment petits du même ordre.p_i tend donc vers $-\rho_0$

4/ Caractère intrinsèque et non intrinsèque des pathologies...

Nous avons mis en évidence,dans l'étude précédente,deux compor--tements singuliers de la métrique intérieure de Schwarzschild, l'un au voisinage de r=o,l'autre au voisinage de $r=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$. Le premier de ces comportements est indépendant du choix de la métrique;il est inhérent à l'espace-temps lui-même:le point r=o est une singularité de cet espace-temps.Le deuxième est lié à la métrique,et nous allons voir ultérieurement qu'il peut être rendu régulier par un changement de variables adéquat.La question

se pose alors de savoir comment se fait-il qu'il soit de l'ordre du possible d'éliminer cette seconde pathologie alors que la première perdure nécessairement ?
Considérons l'écriture linéaire de cette métrique:

$$ds^2 = -\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

La pathologie intérieure $r=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$ apparaît dans la partie radiale, obtenue en posant θ=constante, φ=constante, alors que la singularité r=o ni n'annule, ni ne rend infini l'un des coeffi--cients de dt^2 ou de dr^2. Ainsi, si nous portons nos investigations dans une coupe de l'espace-temps à θ=constante et φ=constante, dans le plan-temps obtenu, la symétrie sphérique n'intervient plus et la singularité r=o n'existe plus, en dehors de la patho--logie intérieure. Cette singularité doit donc son caractère intrinsèque au fait qu'il y ait symétrie sphérique et que le centre de cette symétrie soit précisément le point O, car suppri--mer les deux dimensions θ et φ, c'est ôter au point O son rôle privilégié dans l'espace-temps, et par là annhiler son caractère singulier. Cette position particulière du point O, centre de la symétrie sphérique, est indépendante du choix de la métrique, ce qui explique que tout changement de variables soit inéfficace dans sa tentative d'éliminer r=o en tant que singularité.
La pathologie intérieure, elle, est liée à la partie radiale de cette métrique. Or, tous les plans-temps (θ=cte, φ=cte) sont équi--valents de par la symétrie sphérique. Il suffit donc de l'élimi--ner en effectuant une transformation dans l'un de ces plans-temps. Il est important de souligner que cette pathologie ne

devient pas intrinsèque,comme nous aurions pu le supposer,lorsque $r_1=\frac{9}{4}m$,mais elle vient se "superposer" à une singularité intrin--sèque toujours existante,quel que soit r_1.Lorsque débute l'im--plosion,pour $r_1=\frac{9}{4}m$,le point O a un comportement doublement singulier dû d'une part,à sa situation dans l'espace-temps qui en fait le siège d'une singularité intrinsèque,d'autre part à un choix de métrique qui lui impose un comportement pathologique, pathologie non intrinsèque qui a la propriété d'être d'ordre 2, et cela,en raison de la position centrale du point O.En effet, le coefficient de dt^2 s'annule pour $r^2=(9r_1^2-8R^2)$,ce qui corres--pond,d'un point de vue mathématique,à deux solutions opposées:

$$r'=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$r''=-(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$$

Seule la première solution a une réalité physique,excepté le cas où $r_1=\frac{9}{4}m$,c'est-à-dire le cas où $r=o$;les deux solutions r' et r" viennent se confondre en O:la pathologie intérieure est alors double.

Ainsi,si toute tentative destinée à éliminer la singularité r=o est vouée à l'échec,par contre en ce qui concerne la pathologie intérieure,tous les espoirs sont permis car rien n'apparaît dans l'espace-temps qui puisse être révélé comme singulier par cette pathologie.L'éliminer,c'est ce que se propose la suite de ce travail.

CHAPITRE III

UNE NOUVELLE APPROCHE DU "TROU NOIR" SANS CHARGE NI ROTATION...

UNE NOUVELLE APPROCHE DU "TROU NOIR"...

Kruskal nous a proposé une extension analytique maximale de l'espace-temps de Schwarzschild autour d'une masse ponctuelle décrit par la métrique:

$$(III1)\quad ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Si nous considérons l'étoile dont nous venons de suivre l'écrou-lement gravitationnel depuis la valeur $r_1 = \frac{9}{4}m$ jusqu'à la va-leur $r_1 = 2m$, elle se trouve alors contenue dans la sphère de rayon $r_1 = 2m$. La métrique extérieure de Schwarzschild décrit la géométrie de l'espace-temps à l'extérieur de cette sphère.
Le but de ce travail est de conserver les changements de vari-ables proposés par Kruskal pour les valeurs de r supérieures à 2m, changements dont nous allons donner un bref rappel, et d'introduire de nouvelles transformations pour les valeurs de r inférieures à 2m.
Kruskal utilise le système de coordonnées (U,V) découvert par Eddington en I924 et redécouvert par Finkelstein en I958, connu sous le nom de système de Eddington-Finkelstein. Ce système est obtenu en étudiant le mouvement des photons radiaux vers l'ex-térieur (U) et vers l'intérieur (V); il constitue un système de coordonnées de l'espace-temps radial de Schwarzschild ($d\theta = d\varphi = o$)

$$(III2)\quad \begin{cases} U = t - \left[r + 2m\,\mathrm{Log}\left(\frac{r}{2m}-1\right)\right] \\ V = t + \left[r + 2m\,\mathrm{Log}\left(\frac{r}{2m}-1\right)\right] \end{cases}$$

A l'aide de ces nouvelles coordonnées la métrique de Schwarzschild s'écrit:

$$(III3) \qquad ds^2 = -(1-\frac{2m}{r})dUdV + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

Elle reste encore pathologique en r = 2m. Afin d'éliminer le fac-teur singulier $(1-\frac{2m}{r})$, Kruskal introduit les variables x et y:

$$(III4) \qquad \begin{cases} x = -e^{-\frac{U}{4m}} = -(\frac{r}{2m}-1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4m}} e^{-\frac{t}{4m}} \\ y = e^{\frac{V}{4m}} = (\frac{r}{2m}-1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4m}} e^{\frac{t}{4m}} \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire:

$$(III5) \qquad ds^2 = -\frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} dxdy + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

Mais les coordonnées x et y sont des "coordonnées nulles":

$$\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} = g_{xx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial y} = g_{yy} = 0$$

où g_{xx} et g_{yy} sont les coefficients respectifs de dx^2 et de dy^2. Pour en éviter l'utilisation, Kruskal propose le système de coor-données (u,v), appelé système de Kruskal-Szekeres, où u est du genre espace et v du genre temps:

$$(III6) \qquad \begin{cases} u = \frac{1}{2}(y-x) = (\frac{r}{2m}-1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{ch}\frac{t}{4m} \\ v = \frac{1}{2}(y+x) = (\frac{r}{2m}-1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{sh}\frac{t}{4m} \end{cases}$$

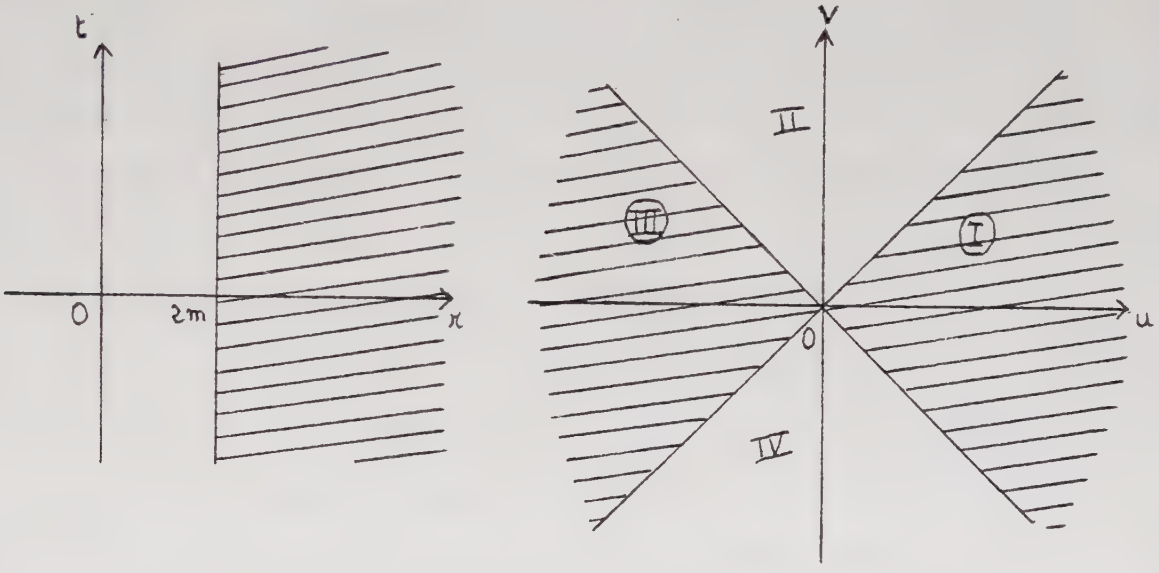
La métrique de Kruskal s'écrit alors:

$$(III7) \qquad ds^2 = -\frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} (dv^2 - du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

La relation $r \geqslant 2m$ se traduit par $u^2 \geqslant v^2$; il y a en fait deux régions qui conviennent:

$$u \geqslant +|v| \quad \text{et} \quad u \leqslant -|v| \ ,$$

la région $r = 2m$ étant représentée par l'ensemble des deux droi-tes d'équation $u = v$ et $u = -v$.



Le changement de variables (III 6) donne à la région $r \geqslant 2m$ pour image la région (I). Dans le quadrant (III), il est possible de transformer la métrique de Kruskal-Szekeres pour obtenir la mé-trique de Schwarzschild; mais les équations donnant u et v en fonction de r et t diffèrent des relations (III 6) par la présence d'un signe "moins" dans les seconds membres :

$$(III 8) \qquad \begin{cases} u = -\left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{ch} \frac{t}{4m} \\ v = -\left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{sh} \frac{t}{4m} \end{cases}$$

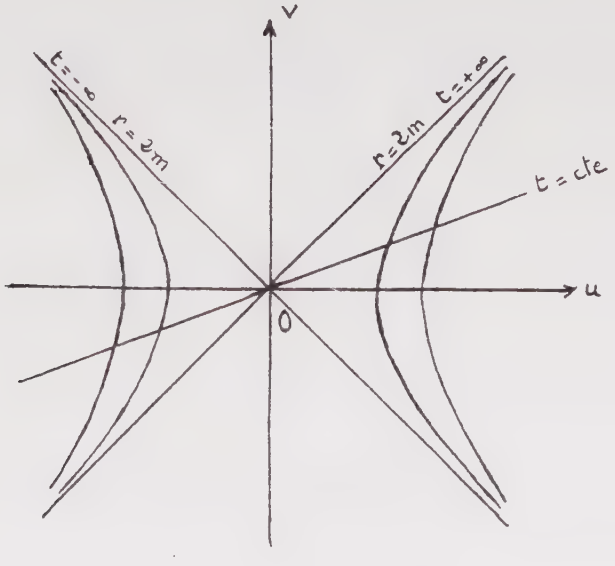
Ainsi, à une région relevant du système de coordonnées de Schwarzs-child, correspondent deux régions dans le système de Kruskal-Szekeres, phénomène dû au fait que le but de cette transformation

est de réaliser une extension analytique maximale de l'espace-temps,le système de Schwarzschild ne recouvrant qu'incomplète--ment cet espace-temps.La transformation inverse s'écrit:

$$(III9)\quad \begin{cases} (\frac{r}{2m}-1)e^{\frac{r}{2m}} = u^2 - v^2 \\ t = 4m\,\mathrm{th}^{-1}\frac{v}{u} \end{cases}$$

Ces équations montrent que les régions r = constante sont,dans le diagramme de Kruskal-Szekeres,des hyperboles,ayant pour asymptotes les droites $u = \pm v$,et que les régions t = constante sont des droites passant par l'origine.

De par l'écriture de la métrique,il est aisé de mettre en évi--dence une dernière propriété,à savoir que les cônes de lumière sont,dans cet espace-temps,identiques à ceux de la géométrie de la relativité restreinte,leurs génératrices sont inclinées à 45 deg.



Nous allons donc conserver ces changements de coordonnées pour les régions (I) et (III) et définir une nouvelle transformation donnant à la région $r \leqslant 2m$ de l'espace temps de Schwarzschild pour image,les régions (II) et (IV)

la région $r = 2m$ devra avoir la même image que dans le chan-
-gement opéré par Kruskal.
La motivation profonde de ce travail est d'obtenir,ainsi,une nouvelle approche des propriétés du "Trou Noir".

Ce que devient la métrique intérieure de Schwarzschild pour $r_1 = 2m$ et les propriétés qui en résultent...

Nous avons suivi l'effondrement gravitationnel de l'étoile de la valeur de r_1 égale à $\frac{9}{4}m$,jusqu'à la valeur $r_1 = 2m$. A ce sta-
-de du collapse,toute l'étoile est inclue dans la sphère de centre O et de rayon $r_1 = 2m$,ce qui justifie l'interêt que nous portons maintenant,à la métrique intérieure de Schwarzschild pour $r_1 = 2m$;son expression devient:

$$(\text{III } 10) \quad ds^2 = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{r^2}{4m^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{4m^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\Psi^2$$

En effet:

$$r_1 = 2m \implies R^2 = \frac{r_1^3}{2m} = 4m^2 \quad \text{donc} \quad \frac{r_1^2}{R^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{r^2}{R^2} = \frac{r^2}{4m^2}$$

En posant $t' = \frac{1}{2}t$ et en renommant t la variable temporelle nous obtenons:

$$(\text{III } 11) \quad \boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{r^2}{4m^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{4m^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\Psi^2}$$

La pathologie intérieure prend ici la valeur $2m$;non seulement cette valeur annule le coefficient de dt^2,mais elle rend de plus,

infini le coefficient de dr^2. Nous nous proposons de construire un nouveau système de coordonnées éliminant cette pathologie. Nous utilisons pour cela une méthode analogue à celle de Edding--ton et Finkelstein afin d'introduire des coordonnées de "temps avancé" et de "temps retardé". Les géodesiques radiales nulles décrivent le mouvement des photons vers l'intérieur ou vers l'extérieur du Trou Noir; elles ont pour équations différentielles

$$ds = d\theta = d\varphi = 0$$

Ce qui permet d'écrire:

$$\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{4m^2}} - (1-\frac{r^2}{4m^2})dt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dt = \pm \frac{dr}{1-\frac{r^2}{4m^2}}$$

Pour trouver une primitive de $\frac{1}{1-\frac{r^2}{4m^2}}$, il suffit de poser:

$$X = \frac{r}{2m} \Rightarrow dX = \frac{1}{2m}dr \Rightarrow \frac{dr}{1-\frac{r^2}{4m^2}} = \frac{2m}{1-X^2}dX$$

Or: $\int \frac{dX}{1-X^2} = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+X}{1-X} \Rightarrow \int \frac{dr}{1-\frac{r^2}{4m^2}} = 2m\int \frac{dX}{1-X^2} = m\text{Log}\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}$

Nous obtenons donc: $t = \pm m\text{Log}\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}} + \text{constante}$

$r \xrightarrow{f} \frac{1}{1-\frac{r^2}{4m^2}}$, f est une fonction croissante de r.

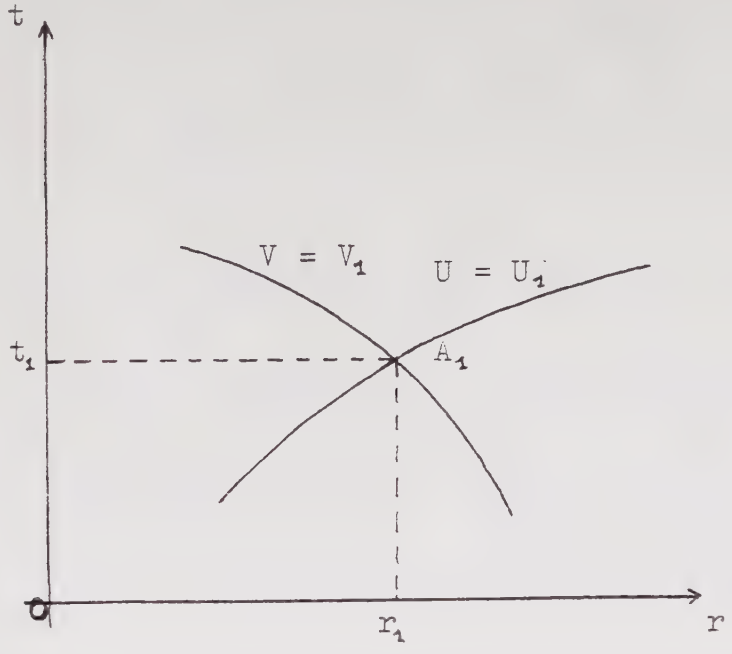
Le mouvement des photons radiaux vers l'extérieur correspond donc au signe + de l'équation différentielle (r croît avec t); il est défini par:

$$t = m\text{Log}\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}} + U$$

Le mouvement des photons radiaux vers l'intérieur correspond au signe - de cette équation (r décroît lorsque t croît):

$$t = -m\mathrm{Log}\,\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}} + V$$

L'ensemble des géodésiques nulles correspond à l'ensemble des valeurs de U et de V:par un point du plan (r,t),$A_1(r_1, t_1)$ d'émission du photon,passe une géodésique de mouvement extérieur correspondant à une certaine valeur U_1 de U et une géodésique de mouvement intérieur correspondant à une certaine valeur V_1 de V;réciproquement,toute géodésique U coupe une géodésique V en un point r et t du plan (r,t).



Les (U,V) constituent donc un système de coordonnées de l'espa--ce-temps radial de Schwarzschild.Les formules de transformation entre les (r,t) et les (U,V) sont données par:

$$(\mathrm{III}\,12)\qquad \begin{cases} U = t - m\mathrm{Log}\,\dfrac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}} \\[2ex] V = t + m\mathrm{Log}\,\dfrac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}} \end{cases}$$

De même que dans le système de Finkelstein-Eddington,U sera ap--pelée "coordonnée de temps retardé" (t-....) et V sera appelée "coordonnée de temps avancé" (t+....).

La métrique intérieure de Schwarzschild peut alors s'exprimer à l'aide de ces nouvelles coordonnées:

$$\begin{cases} V - U = 2m\text{Log}\,\dfrac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}} \\ V + U = 2t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dV - dU = 2\dfrac{dr}{1-\frac{r^2}{4m^2}} \\ dV + dU = 2\,dt \end{cases}$$

Ce qui permet d'exprimer dr et dt en fonction de dU et de dV:

$$dr = \frac{1}{2}(1-\frac{r^2}{4m^2})(dV - dU)$$

$$dt = \frac{1}{2}(dV + dU)$$

La métrique prend alors la forme:

$$(\text{III}\,13) \qquad ds^2 = -(1-\frac{r^2}{4m^2})dVdU + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

D_e par la présence du facteur $(1-\frac{r^2}{4m^2})$,elle reste pathologique en $r = 2m$.Pour éliminer cette pathologie,nous allons adopter la forme générale du changement de variables choisi par Kruskal changement de variables qui utilise les exponentielles de U et V,à savoir:

$$(\text{III}\,14) \quad \begin{cases} x = \alpha e^{\beta U} \\ y = \alpha' e^{\beta' V} \end{cases} \qquad \text{où } \alpha,\beta,\alpha',\beta', \text{sont des constantes non nulles}$$

Ce qui permet d'écrire:

$$dx = \beta\alpha e^{\beta U} dU$$

$$dy = \alpha'\beta' e^{\beta' V} dV$$

$$dxdy = \alpha\alpha'\beta\beta' e^{\beta U} e^{\beta' V} dUdV$$

Or: $$e^{\beta U}e^{\beta' V} = e^{(\beta+\beta')t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{(\beta'-\beta)m}$$

Donc: $$dxdy = \alpha\alpha'\beta\beta' e^{(\beta+\beta')t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{(\beta'-\beta)m} dUdV$$

Ce qui implique:

$$-(1-\frac{r^2}{4m^2})dUdV = -\frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{\alpha\alpha'\beta\beta'} \times \frac{\left(1-\frac{r}{2m}\right)^{(\beta'-\beta)m+1}}{\left(1+\frac{r}{2m}\right)^{(\beta'-\beta)m-1}} dxdy$$

Le ds^2 prend la forme:

$$(III\,15)\quad ds^2 = -\frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{\alpha\alpha'\beta\beta'} \times \frac{\left(1-\frac{r}{2m}\right)^{(\beta'-\beta)m+1}}{\left(1+\frac{r}{2m}\right)^{(\beta'-\beta)m-1}} dxdy + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Mais les coordonnées x et y sont des coordonnées nulles:

$$\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} = g_{xx} = o \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial y} = g_{yy} = o$$

où g_{xx} et g_{yy} sont les coefficients respectifs de dx et de dy Afin d'éviter l'utilisation de telles coordonnées,il est aisé de remplacer x et y par des coordonnées du genre espace et du genre temps,u et v,définies par:

$$u = \frac{1}{2}(y - x)$$

$$v = \frac{1}{2}(y + x)$$

Avec ces nouvelles coordonnées la métrique s'écrit:

$(III\,16)$

$$ds^2 = -\frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{\alpha\alpha'\beta\beta'} \times \frac{\left(1-\frac{r}{2m}\right)^{(\beta'-\beta)m+1}}{\left(1+\frac{r}{2m}\right)^{(\beta'-\beta)m-1}} (dv^2 - du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Nous allons établir les conditions que doivent vérifier les constantes $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, pour que:

1) la métrique ne se conduise pas de façon singulière au voisinage de $r = 2m$

2) v soit une variable du genre temps et u, une variable du genre espace

3) la région $r < 2m$ corresponde aux quadrants II et IV du plan (u,v).

Condition nécessaire et suffisante pour la pathologie $r = 2m$ disparaisse:

Pour que cette pathologie disparaisse, il faut et il suffit que l'exposant du facteur $(1-\frac{r}{2m})$ soit nul, c'est-à-dire:

$$(1) \qquad \boxed{(\beta'-\beta)m + 1 = 0}$$

Condition nécessaire et suffisante pour que v soit du genre temps et u du genre espace:

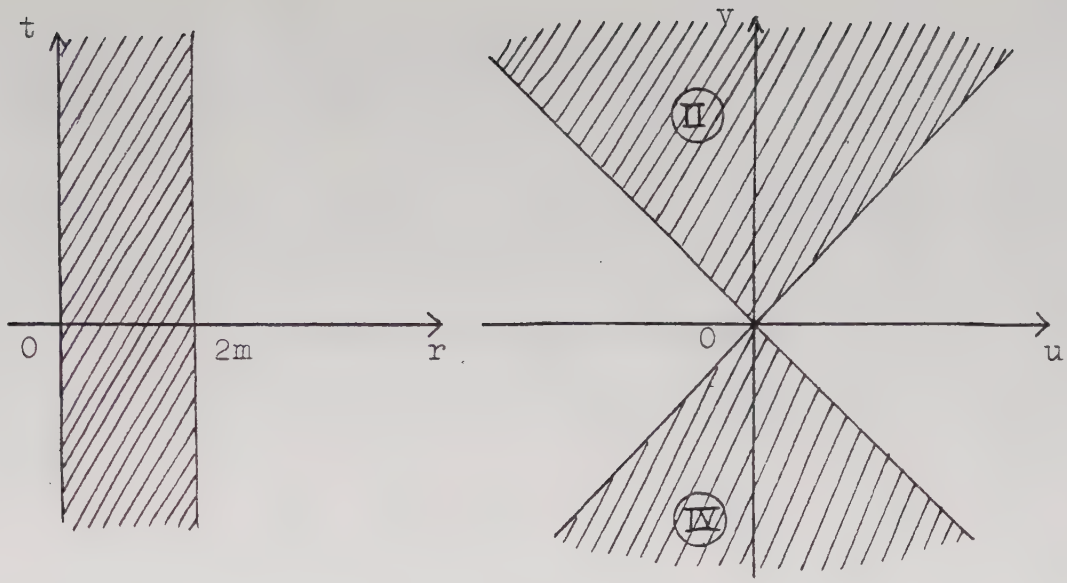
Cette condition est vérifiée si et seulement si le coefficient de dv^2 est négatif et celui de du^2 positif, ce qui s'écrit:

$$(2) \qquad \boxed{\alpha\alpha'\beta\beta' > 0}$$

Condition nécessaire et suffisante pour $v^2 - u^2 > 0$:

$v^2 - u^2 = \alpha\alpha' e^{\beta U + \beta' V}$ donc $v^2 - u^2$ est positif si et seulement si:

$$(3) \qquad \boxed{\alpha\alpha' > 0}$$



Les conditions (2) et (3) implique la relation suivante:

(4) $\boxed{\beta\beta' > 0}$

relation qui met en évidence une propriété fondamentale de cette métrique due au fait que le facteur $e^{-(\beta+\beta')t}$ est nécessaire--ment une fonction de t ($\beta+\beta'$ étant la somme de deux termes non nuls de même signe).Nous énonçons donc cette propriété:

LA METRIQUE A L'INTERIEUR DU TROU NOIR EST NON STATIQUE

Compte tenu de la condition (1) qui impose à $\beta'-\beta$ la valeur $-\frac{1}{m}$, cette métrique s'écrit plus simplement:

(III 17) $$\boxed{ds^2 = -\frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{\alpha\alpha'\beta\beta'}\left(1+\frac{r}{2m}\right)^2 (dv^2 - du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2}$$

De même la différence des carrés $v^2 - u^2$ prend la valeur:

$$(\text{III } 18) \qquad v^2 - u^2 = \alpha\alpha' e^{(\beta+\beta')t} \frac{1 - \frac{r}{2m}}{1 + \frac{r}{2m}}$$

La relation $r < 2m$ se traduit avec les nouvelles coordonnées par la relation $v^2 > u^2$. Ainsi la région de l'espace-temps de Schwarzschild intérieure à la sphère de rayon 2m, correspond en fait à deux régions dans le nouvel espace-temps repéré par les variables u et v:

$$v^2 > u^2 \iff v > +|u| \quad \text{et} \quad v < -|u|$$

Cette propriété est analogue à celle mise en évidence par Kruskal relative à la région $r > 2m$.

Les équations de transformation que nous avons introduites pré-cédemment, donnant u et v en fonction de r et t, à savoir

$$(\text{III } 19) \begin{cases} u = \frac{1}{2}(y - x) = \frac{1}{2}\left[\alpha' e^{\beta' t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{\beta' m} - \alpha e^{\beta t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{-\beta m}\right] \\ v = \frac{1}{2}(y + x) = \frac{1}{2}\left[\alpha' e^{\beta' t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{\beta' m} + \alpha e^{\beta t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{-\beta m}\right] \end{cases}$$

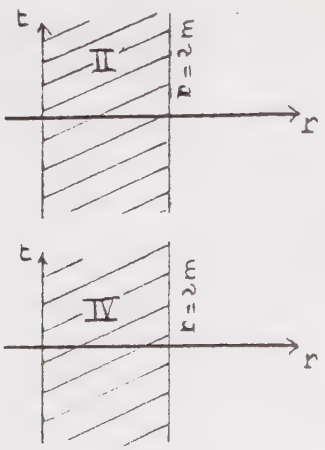
correspondent au quadrant II ($v > +|u|$) si les constantes α et α' sont toutes deux positives (v est alors positif), au quadrant IV ($v < -|u|$), si ces constantes sont négatives (v est alors négatif Dans le quadrant non concerné par le changement de variables ci-dessus (le quadrant IV si α et α' sont positives, le quadrant II si α et α' sont négatives), nous pouvons transformer la métri-que (III 17) pour obtenir la métrique (III 11); les équations de transformation diffèrent quelque peu des relations (III 19), par

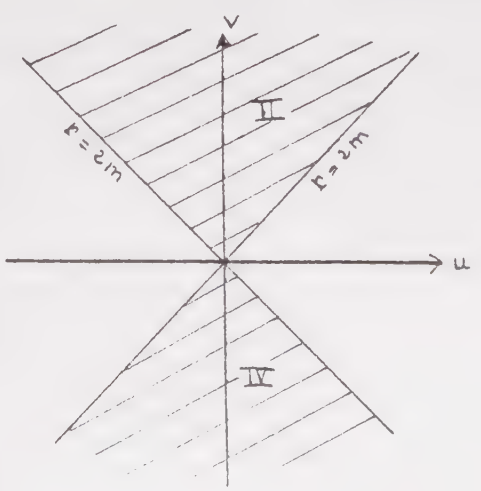
l'introduction d'un signe "moins".Il est aisé de vérifier que les ensembles de transformations suivants conviennent:

(III2o)

$\alpha>0 \quad \alpha'>0$		$\alpha<0 \quad \alpha'<0$
quadrant II	$u = \frac{1}{2}\left[\alpha' e^{\beta' t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{\beta' m} - \alpha e^{\beta t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{-\beta m}\right]$ $v = \frac{1}{2}\left[\alpha' e^{\beta' t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{\beta' m} + \alpha e^{\beta t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{-\beta m}\right]$	quadrant II
quadrant IV	$u = -\frac{1}{2}\left[\alpha' e^{\beta' t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{\beta' m} - \alpha e^{\beta t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{-\beta m}\right]$ $v = -\frac{1}{2}\left[\alpha' e^{\beta' t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{\beta' m} + \alpha e^{\beta t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{-\beta m}\right]$	quadrant II

Ce nouveau système de coordonnées est suffisant pour recouvrir toute la géométrie de Schwarzschild $r<2m$,alors que deux sont nécessaires avec les coordonnées de Schwarzschild.Cette remarque a déjà etait formulée par Kruskal en ce qui concerne la région $r>2m$.





Pour obtenir la transformation inverse, il suffit d'exprimer r et t en fonction de u et de v:

$$x = \alpha e^{\beta t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{-\beta m}$$

$$y = \alpha' e^{\beta' t}\left(\frac{1+\frac{r}{2m}}{1-\frac{r}{2m}}\right)^{\beta' m}$$

Afin d'éliminer la variable r nous calculons le produit:

$$xy^{\beta}\beta^{\prime-1} = \alpha\alpha'^{\beta}\beta^{\prime-1} e^{2\beta t}$$

Cette relation permet d'écrire:

$$t = \frac{1}{2\beta} \operatorname{Log} \frac{1}{\alpha\alpha'^{\beta}\beta^{\prime-1}} xy^{\beta}\beta^{\prime-1}$$

Or: $\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}(y - x) \\ v &= \tfrac{1}{2}(y + x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x = v - u \\ y = v + u \end{cases}$

t s'écrit donc explicitement en fonction de u et v, sous la forme

$$(III21) \qquad t = \frac{1}{2\beta} \operatorname{Log}\left[\frac{1}{\alpha\alpha'^{\beta}\beta^{\prime-1}} (v - u)(v + u)^{\beta}\beta^{\prime-1}\right]$$

Connaissant la valeur de t, il est aisé de trouver la valeur de r Nous utilisons pour cela, la relation

$$v^2 - u^2 = \alpha\alpha' e^{(\beta+\beta')t} \frac{1-\frac{r}{2m}}{1+\frac{r}{2m}}$$

Ce qui implique: $\frac{r}{2m}(v^2 - u^2) + \alpha\alpha' e^{(\beta+\beta')t} = \alpha\alpha' e^{(\beta+\beta')t} - (v^2 - u^2)$

Utilisant l'expression de t en fonction de u,et de v,nous pou-
-vons écrire:

$$e^{(\beta+\beta')t} = \left[\frac{1}{\alpha\alpha'^{\beta\beta'-1}}(v-u)(v+u)^{\beta\beta'-1}\right]^{\frac{\beta+\beta'}{2\beta}}$$

Ainsi,la valeur de r,lorsqu'elle est différente de 2m ($v \neq \pm u$),
est donnée par:

$$(II22) \qquad r = 2m\,\frac{\alpha\alpha'\left[\frac{1}{\alpha\alpha'^{\beta\beta'-1}}(v-u)(v+u)^{\beta\beta'-1}\right]^{\frac{\beta+\beta'}{2\beta}} - (v^2-u^2)}{\alpha\alpha'\left[\frac{1}{\alpha\alpha'^{\beta\beta'-1}}(v-u)(v+u)^{\beta\beta'-1}\right]^{\frac{\beta+\beta'}{2\beta}} + (v^2-u^2)}$$

L'équation(III21)montre que les droites $v = \pm u$ correspondent à
l'infini du temps.D'un point de vue mathématique,il s'agit de $+\infty$
lorsque β est négatif,de $-\infty$ lorsque β est positif.Nous choisi-
-rons $\beta < o$,et,de par ce choix,nous pourrons observer graphique-
-ment,à distance finie,ce qu'il en est de l'espace-temps radial
à $t = +\infty$.C'est dans cet espace-temps radial,décrit par la mé-
-trique non statique(III17)avec $d\theta=d\varphi=o$,que nous allons porter
nos investigations.La méthode adoptée est la suivante:nous allons
étudier cette géométrie à un instant donné,t = constante;ensuite
nous ferons varier la constante afin d'en suivre l'évolution au
cours du temps.

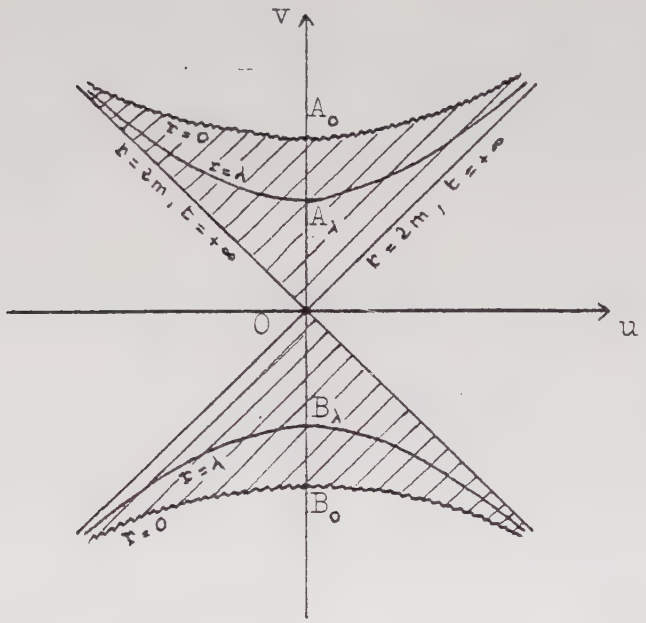
t = constante :

L'équation : $v^2 - u^2 = \alpha\alpha' e^{(\beta+\beta')t}\,\frac{1-\frac{r}{2m}}{1+\frac{r}{2m}}$

met en évidence le fait que les régions r = constante (cette
constante étant différente de 2m),sont représentées par des hy-
-perboles ($v^2 - u^2$ = cte),ayant pour asymptotes les droites
d'équations $v = \pm u$.Lorsque r = 2m,l'hyperbole correspondante

est dégénérée:l'image de la région r=2m est constituée des deux droites $v = \pm u$,et cela quelle que soit la constante t.
L'hyperbole correspondant à la valeur zéro de r,a pour équation

$$v^2 - u^2 = \alpha\alpha' e^{(\beta+\beta')t}$$



L'intérieur de l'étoile est représenté par la région hachurée du diagramme.En effet,les hyperboles H_λ,lieu des points pour lesquels $r=\lambda$,coupent l'axe des v en deux points,l'un situé dans la région II ,A_λ,l'autre situé dans la région IV ,B_λ.Mais,quel que soit λ ,A_λ et B_λ appartiennent à la région hachurée:

$$A_\lambda \begin{cases} u_{A_\lambda} = 0 \\ v_{A_\lambda} = \sqrt{\alpha\alpha'}\, e^{\frac{(\beta+\beta')}{2}t} \left(\dfrac{1-\frac{\lambda}{2m}}{1+\frac{\lambda}{2m}}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad B_\lambda \begin{cases} u_{B_\lambda} = 0 \\ v_{B_\lambda} = -V_{A_\lambda} \end{cases}$$

$$A_0 \begin{cases} u_{A_0} = 0 \\ v_{A_0} = \sqrt{\alpha\alpha'}\, e^{\frac{(\beta+\beta')}{2}t} \end{cases} \qquad B_0 \begin{cases} u_{B_0} = 0 \\ v_{B_0} = -v_{A_0} \end{cases}$$

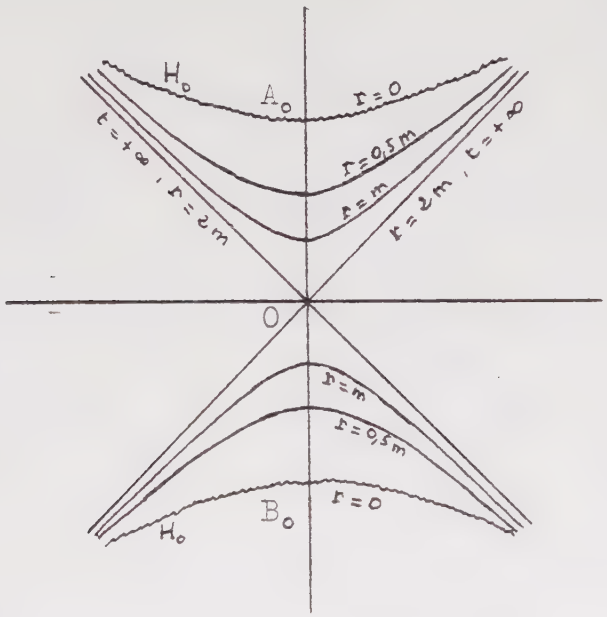
Nous vérifions,à partir de ces relations,que,quelle que soit la

valeur de λ, v_{A_λ} est inférieur à v_{A_o} et v_{B_λ} est supérieur à v_{B_o}, propriété due à la présence, dans les expressions respectives de v_{A_λ} et de v_{B_λ}, du facteur

$$\left(\frac{1-\frac{\lambda}{2m}}{1+\frac{\lambda}{2m}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

facteur qui est toujours inférieur ou égal à 1 quel que soit λ dans l'intervalle $[o,2m]$, d'où l'inclusion de l'hyperbole $\hat{H}_\lambda$ dans la région hachurée.

$\frac{1-\frac{r}{2m}}{1+\frac{r}{2m}}$ est une fonction décroissante de r, donc v_{A_r} décroît lorsque r croît, et v_{B_r} croît; cette remarque nous permet de donner une représentation graphique des courbes r=cte à l'instant t, dans le plan (u,v).



Nous allons étudier maintenant l'évolution de ce diagramme au cours du temps. Il suffit pour cela, de s'intéresser au comportement de l'hyperbole $H_o(r=o)$, lorsque t varie.

Cette hyperbole a,nous l'avons vu,pour équation:

$$v^2 - u^2 = \alpha\alpha' e^{(\beta+\beta')t}$$

La valeur absolue de l'ordonnée des sommets A_o et B_o est donnée par l'expression:

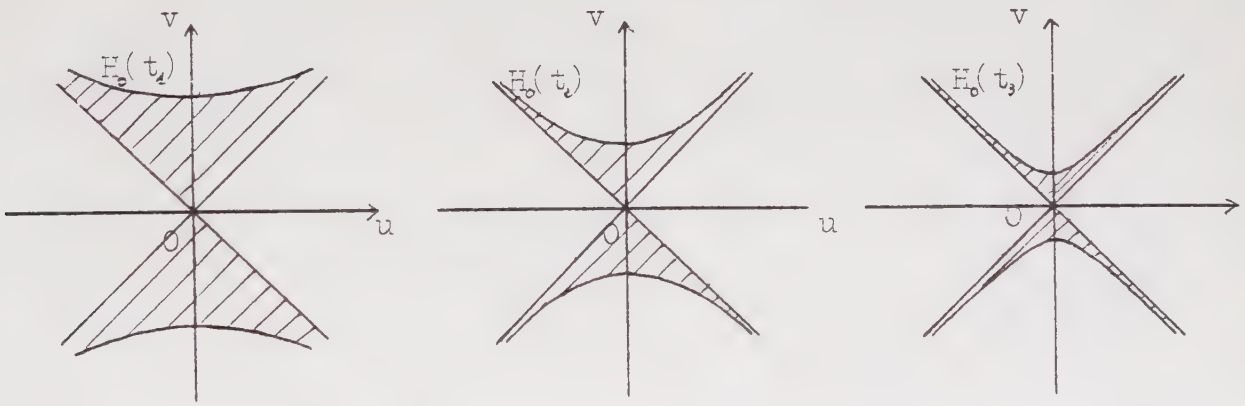
$$\sqrt{\alpha\alpha'}\, e^{\frac{\beta+\beta'}{2}t}$$

expression qui décroît lorsque t croît;en effet $\sqrt{\alpha\alpha'}$ est une constante positive et $\beta+\beta'$,de par le choix de β ($\beta<0$),est inférieur à zéro.

$$t \longrightarrow +\infty \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} v_{A_o} \longrightarrow 0 \\ v_{B_o} \longrightarrow 0 \end{matrix}$$

L'hyperbole H_o,lorsque t croît,s'"écrase" de plus en plus sur ses asymptotes,pour venir se dégénérer en elles à l'infini du temps.

$t_1 < t_2 < t_3$



L'étoile toute entière,c'est-à-dire non seulement la surface de la configuration sphérique,mais aussi l'intérieur de l'étoile, s'"écrase" en r=o.Toute la géométrie de cette région $r \leqslant 2m$ tend vers la singularité initiale,sans jamais l'atteindre:ce n'est qu'à l'infini du temps que l'effondrement est total en r=o.

Nous pouvons maintenant répondre à la question soulevée par le théorème d'Oppeinheimer:l'étoile s'effondre sur elle-même,r tend inexorablement vers zéro,mais peut-il atteindre cette limite en un temps fini,toute la "masse" de l'étoile étant alors concentrée en O ? La réponse est non.

LA SINGULARITE r=o N'EST JAMAIS ATTEINTE.

CHAPITRE IV

UNE PROPOSITION DE CHANGEMENT DE VARIABLES PERMETTANT L'OBTENTION D'UNE METRIQUE NON SINGULIERE AU VOISINAGE DE $r=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$...

UNE PROPOSITION DE CHANGEMENT DE VARIABLES PERMETTANT L'OBTEN--TION D'UNE METRIQUE NON SINGULIERE AU VOISINAGE DE $r=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$...

Nous avons réussi, dans la partie précédente, à éliminer la patho--logie intérieure $r=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$ dans un cas très particulier correspondant à la valeur de r_1 égale à 2m. Cette étude nous a permis une nouvelle approche du Trou Noir. Mais nous nous devons, dans un dernier chapître d'honorer nos dires quant à la possibi--lité d'éliminer cette pathologie intérieure de la métrique de Schwarzschild

$$(\text{IV}\,1)\quad ds^2 = -\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

et cela quel que soit r_1 appartenant à l'intervalle $\left[2m, \frac{9}{4}m\right]$, ce domaine d'appartenance étant la condition même d'existence de la pathologie.

Nous allons procéder comme dans le cas $r_1=2m$, en introduisant les coordonnées de "temps avancé" et de "temps retardé", suivant la méthode de Finkelstein et Eddington.

Nous considérons donc les géodésiques radiales nulles, décrivant le mouvement des photons radiaux vers l'extérieur ou vers l'in--tèrieur dont les équations différentielles sont:

$$ds = o \quad , \quad d\theta = o \quad , \quad d\varphi = o$$

Ce qui s'écrit, en utilisant l'expression de la métrique:

$$\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} = \left[\frac{1}{2}\left(3\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}}-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)\right]^2 dt^2$$

Nous posons: $\boxed{A = 3\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}}}$ $\quad (\text{IV}\,2)$

La relation précédente devient:

$$dt^2 = \frac{4dr^2}{(1-\frac{r^2}{R^2})(A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}})^2}$$

r étant inférieur ou égal à R,nous introduisons une nouvelle variable θ:

$$r = R\sin\theta \quad \text{avec} \quad \theta \in \left[o,\frac{\pi}{2}\right]$$

Les équations ci-dessus s'écrivent:

$$dt^2 = 4R^2\frac{d\theta^2}{(A-\cos\theta)^2}$$

Ce qui implique:

$$dt = \pm 2R\frac{d\theta}{|A-\cos\theta|}$$

Nous devons intégrer ces deux équations différentielles,et pour cela,trouver les primitives de $\frac{1}{|A-\cos\theta|}$:

$$\cos\theta = \frac{1-\vartheta^2}{1+\vartheta^2} \quad \text{avec} \quad \vartheta = tg\frac{\theta}{2}$$

θ appartenant à $\left[o,\frac{\pi}{2}\right]$, ϑ appartient à $\left[o,1\right]$

$$\cos\theta = \frac{1-\vartheta^2}{1+\vartheta^2} \implies -\sin\theta d\theta = \frac{-4\vartheta}{(1+\vartheta^2)^2}d\vartheta \implies d\theta = \frac{1}{\sin\theta}\times\frac{4\vartheta}{(1+\vartheta^2)^2}d\vartheta$$

Or $\sin\theta = \frac{2\vartheta}{1+\vartheta^2}$,ainsi nous obtenons l'expression de dθ:

$$d\theta = \frac{2}{1+\vartheta^2}d\vartheta$$

Donc: $$\frac{d\theta}{|A-\cos\theta|} = \frac{\frac{2}{1+\vartheta^2}d\vartheta}{\left|A-\frac{1-\vartheta^2}{1+\vartheta^2}\right|} = \frac{2d\vartheta}{|(A+1)\vartheta^2+(A-1)|}$$

Nous allons,à ce niveau,scinder l'étude en deux cas,le premier cas correspondant aux valeurs de A différentes de 1,le deuxième cas à la valeur A=1 .

Premier cas: $\boxed{A \neq 1}$

$$A \neq 1 \iff 3\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}} \neq 1 \iff r_1 \neq \frac{9}{4}m$$

A appartenant à l'intervalle $[o,1[$, nous pouvons écrire:

$$\frac{d\theta}{|A-\cos\theta|} = \frac{2}{|A-1|} \times \frac{d\varphi}{\left|\frac{A+1}{A-1}\varphi^2+1\right|}$$

Le rapport $\frac{A+1}{A-1}$ est négatif, on pose donc $B = -\frac{A+1}{A-1} = \frac{1+A}{1-A}$, où B est un nombre positif.

$$\frac{d\theta}{|A-\cos\theta|} = \frac{2}{|A-1|} \times \frac{d\varphi}{|1-B\varphi^2|}$$

Il est aisé maintenant de trouver une ou plusieurs primitives de $\frac{1}{|1-B\varphi^2|}$. En effet:

$$\frac{d\varphi}{|1-B\varphi^2|} = \frac{1}{\sqrt{B}} \times \frac{d(\sqrt{B}\,\varphi)}{|1-(\sqrt{B}\,\varphi)^2|}$$

Les primitives de $\frac{1}{|1-X^2|}$ sont : $\varepsilon\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{1+X}{1-X}\right| + \text{cte}$ avec $\begin{cases}\varepsilon=+1 \text{ si } 1-X^2>0\\ \varepsilon=-1 \text{ si } 1-X^2<0\end{cases}$

Donc: $$\int\frac{d\theta}{|A-\cos\theta|} = \frac{2\varepsilon}{|A-1|} \times \frac{1}{\sqrt{B}} \times \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{1+\sqrt{B}\,\varphi}{1-\sqrt{B}\,\varphi}\right| + \text{cte}$$

En remplaçant B par sa valeur et en remarquant que $|A-1| = \sqrt{(A-1)^2}$ nous obtenons:

$$\int\frac{d\theta}{|A-\cos\theta|} = \varepsilon\frac{1}{\sqrt{1-A^2}}\,\mathrm{Log}\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right| + \text{cte}$$

Ainsi, les équations différentielles $dt = \pm 2R\frac{d\theta}{|A-\cos\theta|}$ s'intègrent

$$t = \pm 2R\left[\varepsilon\frac{1}{\sqrt{1-A^2}}\,\mathrm{Log}\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right|\right] + C$$

$\varepsilon = +1$ si $1 - \frac{1+A}{1-A}\varphi^2$ est positif

$\varepsilon = -1$ si $1 - \frac{1+A}{1-A}\varphi^2$ est négatif

Or $1 - \frac{1+A}{1-A}\varphi^2$ est positif si et seulement si $\varphi^2 < \frac{1-A}{1+A}$

$$\varphi^2 < \frac{1-A}{1+A} \iff \frac{1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}} < \frac{1-3\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{1+3\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}$$

Cette inégalité peut s'écrire:

$$(1-\sqrt{1-\tfrac{r^2}{R^2}})(1+3\sqrt{1-\tfrac{r^2}{R^2}}) < (1+\sqrt{1-\tfrac{r^2}{R^2}})(1-3\sqrt{1-\tfrac{r^2}{R^2}})$$

Soit: $3\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} < \sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} \iff r^2 < 9r_1^2 - 8R^2$

Ainsi:

(IV 3)

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \quad \text{si} \quad r < (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}} \\ \varepsilon = -1 \quad \text{si} \quad r > (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}} \end{array}}$$

φ^2 est une fonction croissante de θ;en effet:

$$\varphi^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \implies \frac{d\varphi^2}{d\theta} = \frac{2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2} \quad \text{avec} \quad \frac{d\varphi^2}{d\theta} \geqslant 0$$

θ est une fonction croissante de r ($\theta = \text{Arcsin}\frac{r}{R}$).Ainsi,lorsque r croît, φ^2 croît;il en est de même pour φ ,ce qui permet d'affirmer que le rapport:

$$\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}$$

est une fonction croissante de r.L'expression

$$\varepsilon \frac{1}{\sqrt{1-A^2}} \text{ Log} \left| \frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi} \right|$$

croît lorsque r croît.En effet,deux cas sont à considérer suivant le signe de l'expression dont on prend la valeur absolue:

1) $\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi} > o$ c'est-à-dire $r < (9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$

$\left|\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}\right|$ croît lorsque r croît, et l'expression $\varepsilon\frac{1}{\sqrt{1-A^2}}\,\mathrm{Log}\left|\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}\right|$ qui s'écrit alors $\frac{1}{\sqrt{1-A^2}}\,\mathrm{Log}\left[\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}\right]$ est une fonction croissante de r

2) $\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi} < o$ c'est-à-dire $r > (9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$

Dans ce cas, $\left|\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}\right|$ décroît lorsque r croît, mais ε est égal à -1. Ainsi, le produit $\varepsilon\frac{1}{\sqrt{1-A^2}}\,\mathrm{Log}\left|\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}\right|$ prend la forme $-\frac{1}{\sqrt{1-A^2}}\,\mathrm{Log}\left[-\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}\right]$: c'est encore une fonction croissante de r.

Ces conclusions permettent d'affirmer que le mouvement des pho-tons radiaux vers l'extérieur (r croît avec t) correspond au signe "plus" des équations différentielles, et le mouvement des photons radiaux vers l'intérieur (r décroît lorsque t croît), au signe "moins"

$$(\text{IV}\,4)\qquad \begin{cases} U = t - \dfrac{2R\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}\,\mathrm{Log}\left|\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}\right| \\ V = t + \dfrac{2R\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}\,\mathrm{Log}\left|\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}\right| \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \varphi = \left(\dfrac{1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les (U,V) constituent un système de coordonnées de l'espace-temps radial de Schwarzschild.

La métrique peut alors s'exprimer à l'aide de ces nouvelles

coordonnées:

$$\begin{cases} V - U = \frac{4R\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}} \operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{B}\,\varphi}{1-\sqrt{B}\,\varphi}\right| \\ V + U = 2t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dV - dU = \frac{4R}{\sqrt{1-A^2}} \times \frac{2\sqrt{B}}{|1-B\varphi^2|} d\varphi \\ dV + dU = 2\,dt \end{cases}$$

Or: $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{1-A^2}} = \sqrt{\frac{1+A}{1-A}} \times \frac{1}{\sqrt{1-A^2}} = \frac{1}{1-A} \Longrightarrow dV - dU = \frac{8R}{1-A} \times \frac{d\varphi}{|1-B\varphi^2|}$

Nous devons maintenant exprimer $d\varphi$ en fonction de dr:

$$dr = R\cos\theta d\theta \quad \text{et} \quad d\theta = \frac{2}{1+\varphi^2} d\varphi$$

Ainsi: $dr = R\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2} \times \frac{2}{1+\varphi^2} d\varphi \Longrightarrow d\varphi = \frac{1}{2R} \times \frac{(1+\varphi^2)^2}{1-\varphi^2} dr$

Donc: $dV - dU = \frac{4}{1-A} \times \frac{1}{|1-B\varphi^2|} \times \frac{(1+\varphi^2)^2}{1-\varphi^2}\, dr$

Ce qui permet de donner les expressions de dr et dt en fonction de dU et dV:

$$\begin{cases} dr = \frac{1-A}{4}\left|1-\frac{1+A}{1-A}\varphi^2\right| \frac{1-\varphi^2}{(1+\varphi^2)^2}(dV - dU) \\ dt = \frac{1}{2}(dV + dU) \end{cases}$$

On pose: $H = -\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dt^2$ et $K = \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}}$

$$H = -\frac{1}{16}\left(A-\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}\right)^2 (dV + dU)^2$$

$$K = \frac{1}{16} \times \frac{(1-A)^2}{(1+\varphi^2)^2} \times \left(1-\frac{1+A}{1-A}\varphi^2\right)^2 (dV - dU)^2$$

Or: $\left(1-\frac{1+A}{1-A}\varphi^2\right)^2 = \left(\frac{1-\varphi^2-(1+\varphi^2)A}{1-A}\right)^2 = \frac{1}{(1-A)^2}(1+\varphi^2)^2 \left(\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}-A\right)^2$

Ainsi: $K = \frac{1}{16}\left(A-\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}\right)^2 (dV - dU)^2$

La métrique prend alors la forme:

$$ds^2 = -\frac{1}{16}\left(A-\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}\right)^2\left[(dV+dU)^2-(dV-dU)^2\right] + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\Psi^2$$

Cette écriture se simplifie,et,en remplaçant $\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}$ par sa va--leur en fonction de r,elle devient:

$$(IV\,5)\qquad ds^2 = -\frac{1}{4}\left(A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dUdV + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\Psi^2$$

De par la présence du facteur $\left(A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2$,cette métrique reste pathologique en $r=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque:Il est aisé de vérifier que cette métrique est la même à une constante prés,que celle que nous avons trouvée dans le chapître précédent, pour $r_1=2m$;en effet:

$$r_1=2m \implies R^2=4m^2 \implies A=o$$

Le ds^2 s'écrit alors :

$$ds^2 = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{r^2}{4m^2}\right)dUdV + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\Psi^2$$

De même qu'elle était pathologique en r=2m pour $r_1=2m$,elle est, dans le cas général,pathologique en $r=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$.Pour éliminer cette pathologie,nous allons adopter un changement de variables analogue à celui précédemment utilisé,à savoir un changement du type:

$$\begin{aligned} x &= \alpha e^{\beta U} \\ y &= \alpha' e^{\beta' V} \end{aligned}$$ où $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$,sont des constantes non nulles

Ce qui permet d'écrire:

$$\begin{aligned} dx &= \alpha\beta e^{\beta U}dU \\ dy &= \alpha'\beta' e^{\beta' V}dV \end{aligned} \implies dxdy = \alpha\alpha'\beta\beta' e^{\beta U}e^{\beta' V}dUdV$$

Or: $$e^{\beta U} = e^{\beta t}\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right|^{\frac{-2R\beta\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}} \quad \text{et} \quad e^{\beta' V} = e^{\beta' t}\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right|^{\frac{2R\beta'\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}}$$

Nous pouvons exprimer dUdV en fonction de dxdy:

$$dUdV = \frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{\alpha\alpha'\beta\beta'} \times \left| \frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi} \right| \frac{2R(\beta-\beta')\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}\, dxdy$$

Mais l'expression dont on prend la valeur absolue peut s'écrire différemment:

$$\left| \frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi} \right| = \frac{(1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi)^2}{\left|1-\frac{1+A}{1-A}\varphi^2\right|} = (1-A)\frac{(1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi)^2}{|(1-\varphi^2)-A(1+\varphi^2)|} = \frac{1-A}{1+\varphi^2} \times \left| \frac{(1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi)^2}{\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}-A} \right|$$

Ainsi le dénominateur de ce rapport s'annule pour $A = \frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}$; c'est-à-dire pour $A = \sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}$,ce qui correspond à la valeur de r égale à $(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$ .Cette remarque va nous permettre d'éliminer la pathologie intérieure.

$$-\frac{1}{4}(A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}})^2\, dUdV = -\frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{4\alpha\alpha'\beta\beta'} \times Q \times (A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}})^2 \times \left|A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right| \frac{2R(\beta'-\beta)\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}\, dxdy$$

Pour que le facteur $|(A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}})|$ disparaisse de l'écriture de la métrique,il faut et il suffit qu'il soit affecté d'un exposant nul;cette condition nécessaire et suffisante s'écrit:

$$2 + \frac{2R(\beta'-\beta)\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta - \beta' = \frac{\sqrt{1-A^2}}{R}\,\varepsilon$$

Ainsi: $$-\frac{1}{4}(A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}})^2\, dUdV = \frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{4\alpha\alpha'\beta\beta'} \times Q \times dxdy$$

Et: $$Q = \left[\frac{1-A}{1+\varphi^2}(1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi)^2\right] \frac{2R(\beta-\beta')\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}$$

La métrique prend alors la forme: (IV 6)

$$ds^2 = -\frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{4\alpha\alpha'\beta\beta'} \times (\frac{1-A}{1+\varphi^2})^2 \times (1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi)^4\, dxdy + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\Psi^2$$

Mais les coordonnées x et y sont des coordonnées nulles:

$$\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} = g_{xx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial y} = g_{yy} = 0$$

où g_{xx} et g_{yy} sont les coefficients respectifs de dx et de dy. Afin d'éviter l'utilisation de telles coordonnées, nous remplacerons x et y par des coordonnées du genre espace et du genre temps, u et v, définies par:

$$\text{(IV 7)} \qquad \begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}(y - x) \\ v &= \tfrac{1}{2}(y + x) \end{aligned}$$

Avec ces nouvelles coordonnées la métrique s'écrit:

(IV 8)

$$\boxed{ds^2 = -\frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{4\alpha\alpha'\beta\beta'}\left(\frac{1-A}{1+\varphi^2}\right)^2 \left(1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi\right)^4 (dv^2 - du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\Psi^2}$$

Avec:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}} \qquad \text{(IV 9)}$$

Remarque:

Cette métrique est bien une généralisation de la métrique trouvée dans le cas particulier correspondant à $r_1 = 2m$. En effet, donnons dans son expression à r_1 la valeur 2m; A est alors une constante nulle, et R est égal à 2m. Le ds^2 s'écrit:

$$ds^2 = -\frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{4\alpha\alpha'\beta\beta'} \times \frac{1}{(1+\varphi^2)^2} (1+\varphi)^4 (dv^2 - du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\Psi^2$$

Comparons avec le ds^2 trouvé dans le chapître précédent:

$$ds^2 = -\frac{e^{-(\beta+\beta')t}}{\alpha\alpha'\beta\beta'} \left(1+\frac{r}{2m}\right)^2 (dv^2 - du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\Psi^2$$

Pour préciser cette comparaison, il suffit d'exprimer le facteur $\frac{(1+\mathcal{Y})^4}{(1+\mathcal{Y}^2)^2}$ en fonction de r. Nous avons introduit la variable $\mathcal{Y}$ en posant: $\mathcal{Y} = tg\frac{\theta}{2}$

Nous pouvons donc écrire:

$$\frac{(1+\mathcal{Y})^4}{(1+\mathcal{Y}^2)^2} = \frac{(1+ tg\frac{\theta}{2})^4}{(1+ tg^2\frac{\theta}{2})^2} = (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})^4 = \left[(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})^2\right]^2$$

Or: $(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})^2 = 1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 1 + \sin\theta$

Et: $\sin\theta = \frac{r}{R} = \frac{r}{2m}$

Ainsi: $\frac{(1+\mathcal{Y})^4}{(1+\mathcal{Y}^2)^2} = (1+ \frac{r}{2m})^2$

La conclusion de cette comparaison s'énonce de la façon suivante la métrique trouvée dans le chapître précédent (III 17), est effectivement un cas particulier de la métrique la plus générale que nous venons d'obtenir.

Mais dans cette métrique, comme dans la métrique particulière correspondant au cas r =2m, le choix des constantes $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, n'est pas absolument quelconque.

Nous avons établi une condition nécessaire et suffisante pour que la métrique n'ait pas un comportement singulier au voisinage de la pathologie intérieure:

(1) $$\boxed{\beta - \beta' = \frac{\sqrt{1-A^2}}{R}\varepsilon}$$

Ces constantes $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, doivent vérifier une autre condition nécessaire et suffisante, condition pour que la variable v soit du genre temps et la variable u du genre espace; cette condition

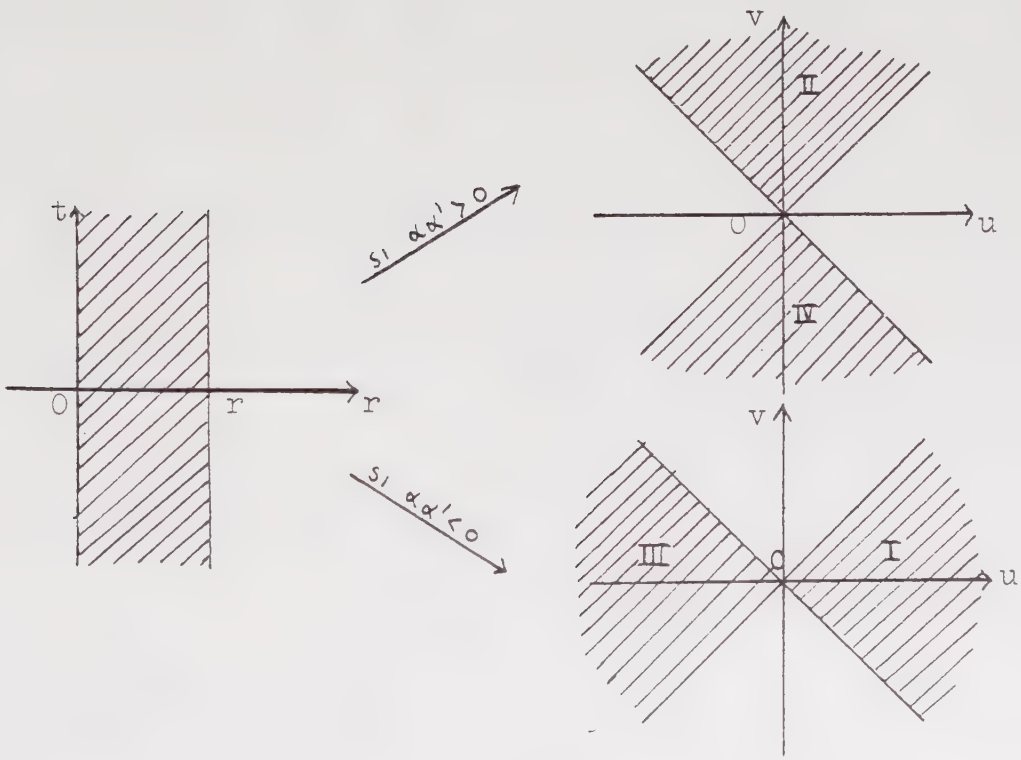
est identique à celle exprimée dans le chapître précédent:

(2) $\boxed{\alpha\alpha'\beta\beta' > 0}$

Quant au choix du signe du produit $\alpha\alpha'$, il est déterminant au niveau de la représentation graphique du plan-temps (θ=cte, φ=cte) correspondant aux valeurs de r inférieures à r_1. En effet, si $\alpha\alpha'$ est positif, l'image de la coupe à θ=cte et φ=cte de l'espace-temps de Schwarzschild pour $r < r_1$, est la réunion des régions II et IV représentées ci-dessous; si $\alpha\alpha'$ est négatif, ce sont les régions I et III qui conviennent. En effet:

$$v^2 - u^2 = \alpha\alpha' e^{\beta U} e^{\beta' V}$$

$$\begin{cases} \alpha\alpha' > 0 \iff v^2 > u^2 \\ \alpha\alpha' < 0 \iff u^2 > v^2 \end{cases}$$



L'expression de $v^2 - u^2$:

$$(\text{IV } 10) \qquad v^2 - u^2 = \alpha\alpha' e^{(\beta+\beta')t} \left| \frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\xi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\xi} \right|^{\frac{2R(\beta'-\beta)\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}}$$

qui s'écrit aussi sous la forme:

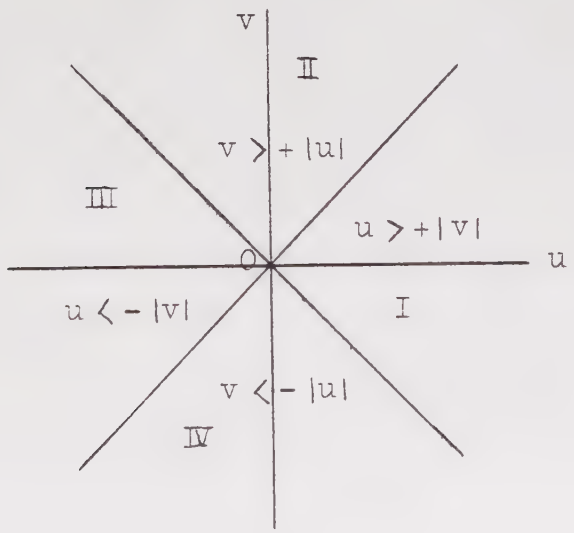
$$(\text{IV } 11) \qquad v^2 - u^2 = \alpha\alpha' e^{(\beta+\beta')t} \left(\frac{1+\xi^2}{1-A}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\xi\right)^{4}} \left(A - \sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2$$

met en évidence le fait que la pathologie intérieure se trouve décrite par les droites $v = \pm u$.

La relation $r < r_1$ se traduit, en utilisant le système de coor-données (u,v), soit par $v^2 > u^2$ (lorsque $\alpha\alpha' > 0$), soit par $u^2 > v^2$ (lorsque $\alpha\alpha' < 0$), ce qui correspond en fait, dans chacun des deux cas, à deux régions de l'espace-temps repéré par ces nouvelles coordonnées:

$$v^2 > u^2 \iff v > +|u| \quad \text{et} \quad v < -|u|$$

$$u^2 > v^2 \iff u > +|v| \quad \text{et} \quad u < -|v|$$



Premier cas: $\alpha\alpha' > 0$

Les équations de transformation:

$$(\text{IV } 12) \qquad \begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}(y - x) = \tfrac{1}{2}(\alpha' e^{\beta' V} - \alpha e^{\beta U}) \\ v &= \tfrac{1}{2}(y + x) = \tfrac{1}{2}(\alpha' e^{\beta' V} + \alpha e^{\beta U}) \end{aligned}$$

correspondent au quadrant II si les constantes α et α' sont toutes deux positives, au quadrant IV si elles sont négatives. Nous devons donner un changement de variables adéquat dans le quadrant non concerné (IV si α et α' sont positives, II si α et α' sont négatives). On vérifie aisément que la transformation suivante convient:

$$(\text{IV } 13) \qquad \begin{aligned} u &= -\tfrac{1}{2}(\alpha' e^{\beta' V} - \alpha e^{\beta U}) \\ v &= -\tfrac{1}{2}(\alpha' e^{\beta' V} + \alpha e^{\beta U}) \end{aligned}$$

Deuxième cas: $\alpha\alpha' < 0$

Les équations de transformation:

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}(\alpha' e^{\beta' V} - \alpha e^{\beta U}) \\ v &= \tfrac{1}{2}(\alpha' e^{\beta' V} + \alpha e^{\beta U}) \end{aligned}$$

correspondent dans ce cas au quadrant III si $\alpha > 0$ (en effet, α' est alors négatif et c'est la relation $u < -|v|$ qui est vérifiée), au quadrant I si $\alpha < 0$ (α' est positif, c'est la relation $u > +|v|$ qui est vérifiée). Pour recouvrir toute la géométrie de Schwarz-child $r < r_1$, il suffit d'utiliser le second changement de variables du premier cas, la seule différence étant que maintenant α et α' sont de signes différents.

Nous pouvons résumer ces résultats dans un tableau, en remarquant que dans chacun des deux cas ($\alpha\alpha' > 0$ et $\alpha\alpha' < 0$), avec les nouvelles variables, un seul système de coordonnées suffit pour recouvrir toute la géométrie $r < r_1$, alors que deux sont néce-

-saires avec les coordonnées (r,t) de Schwarzschild,remarque déjà formulée par Kruskal lors de l'étude de la métrique exté--rieure de Schwarzschild.

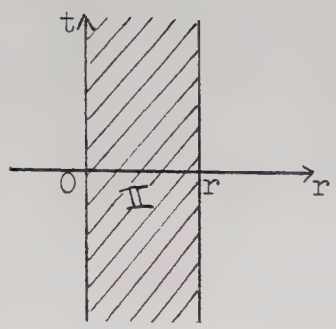
(IV 14)

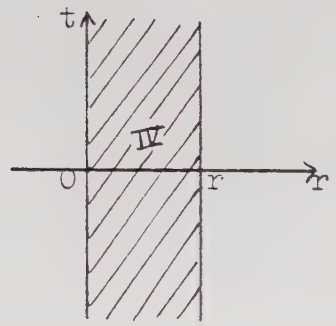
$\alpha > 0$			$\alpha < 0$	
α'	quad		α'	quad
$\alpha'>0 \Rightarrow$ II $\alpha'<0 \Rightarrow$ III		$u = \frac{1}{2}\left[\alpha' e^{\beta' t}\left\lvert\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right\rvert^{\frac{2R\beta'\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}} - \alpha e^{\beta t}\left\lvert\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right\rvert^{-\frac{2R\beta\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}}\right]$ $v = \frac{1}{2}\left[\alpha' e^{\beta' t}\left\lvert\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right\rvert^{\frac{2R\beta'\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}} + \alpha e^{\beta t}\left\lvert\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right\rvert^{-\frac{2R\beta\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}}\right]$	$\alpha'<0 \Rightarrow$ IV $\alpha'>0 \Rightarrow$ I	
$\alpha'>0 \Rightarrow$ IV $\alpha'<0 \Rightarrow$ I		$u = -\frac{1}{2}\left[\alpha' e^{\beta' t}\left\lvert\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right\rvert^{\frac{2R\beta'\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}} - \alpha e^{\beta t}\left\lvert\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right\rvert^{-\frac{2R\beta\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}}\right]$ $v = -\frac{1}{2}\left[\alpha' e^{\beta' t}\left\lvert\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right\rvert^{\frac{2R\beta'\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}} + \alpha e^{\beta t}\left\lvert\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}\right\rvert^{-\frac{2R\beta\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}}\right]$	$\alpha'<0 \Rightarrow$ II $\alpha'>0 \Rightarrow$ III	

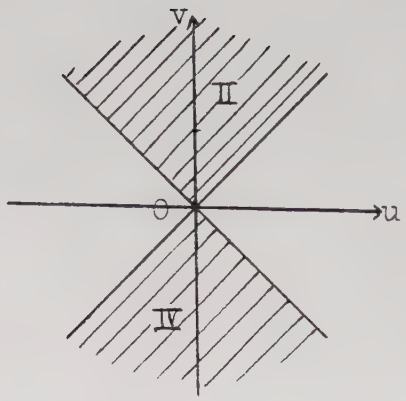
$\varepsilon = +1$ si $r < (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$
$\varepsilon = -1$ si $r > (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$

Les diagrammes de la page suivante illustrent la remarque précédente:

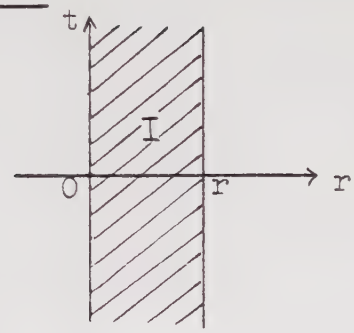
$\alpha\alpha' > 0$

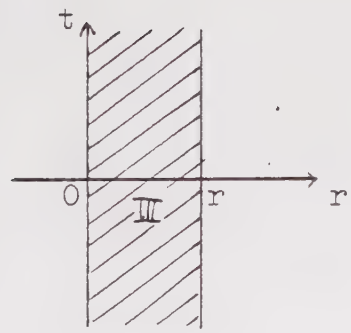


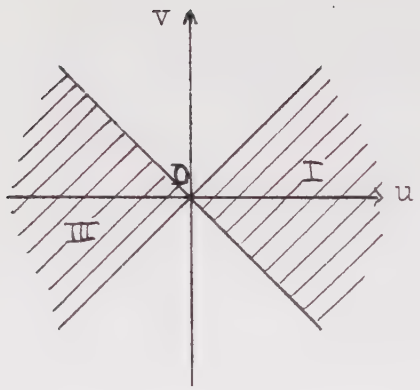




$\alpha\alpha' < 0$







La transformation inverse permettant d'obtenir les coordonnées (r,t) à partir des coordonnées (u,v),est donnée par:

$$(\text{IV}15)\quad t = \frac{1}{2\beta}\,\mathrm{Log}\left[\frac{1}{\alpha\alpha'^{\beta\beta'^{-1}}}(v-u)(v+u)^{\beta\beta'^{-1}}\right]$$

$$(\text{IV}16)\quad \left(A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 = \frac{(1-A)^2}{\alpha\alpha'(1+\varphi^2)^2}\left(1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi\right)^2(v^2-u^2)\left[\frac{1}{\alpha\alpha'^{\beta\beta'^{-1}}}(v-u)(v+u)^{\beta\beta'^{-1}}\right]^{\frac{\beta+\beta'}{2\beta}}$$

La première relation s'obtient en utilisant les expressions de $v-u$ et de $v+u$ en fonction de φ et de t:

$$v-u = \alpha e^{\beta t}\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}\right|^{-\frac{2R\beta\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}}$$

$$v+u = \alpha' e^{\beta' t}\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi}\right|^{\frac{2R\beta'\varepsilon}{\sqrt{1-A^2}}} \quad\Longrightarrow\quad (v-u)(v+u)^{\beta\beta'^{-1}} = \alpha\alpha'^{\beta\beta'^{-1}} e^{2\beta t}$$

Connaissant t, il est aisé d'obtenir $\left(A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2$ à partir de l'expression de v^2-u^2.

La formule (IV 15) montre que les droites $v = \pm u$ correspondent à l'infini du temps. Mathématiquement, nous devons distinguer les cas $+\infty$ et $-\infty$:

Lorsque v tend vers u, l'expression entre crochets a pour limite zéro et le logarithme népérien tend vers $-\infty$. La droite $v = u$ correspondra à $t = +\infty$ ou à $t = -\infty$ suivant le signe de β.

Lorsque v tend vers $-u$, la limite de l'expression entre crochets dépend de l'exposant $\beta\beta'^{-1}$; en effet, $(v+u)^{\beta\beta'^{-1}}$ tend vers zéro si $\beta\beta'^{-1}$ est positif, vers l'infini si $\beta\beta'^{-1}$ est négatif; le logarithme tend donc soit vers $-\infty$, soit vers $+\infty$, et le signe de β sera là encore déterminant quant au comportement de t.

Nous pouvons énoncer ces différentes possibilités dans le tableau suivant, en présentant, au préalable, une remarque relative aux incidences de la condition $\beta - \beta' = \frac{\sqrt{1-A^2}}{R}\varepsilon$ quant au choix des constantes β et β'.

Remarque:

La condition $\beta - \beta' = \frac{\sqrt{1-A^2}}{R}\varepsilon$ implique un choix différent pour β et β' selon la région considérée, région telle que r soit su--périeur à $(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$ ou bien telle que r soit inférieur à cet--te valeur. En effet, à l'extérieur de la sphère Γ_{r_1}, lieu des points pour lesquels $r = (9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$, ε est égal à -1; donc, si nous appelons β_e et β'_e les constantes β et β' dans cette région nous pouvons écrire la relation:

$$\beta_e - \beta'_e = -\frac{\sqrt{1-A^2}}{R}$$

De même, à l'intérieur de cette sphère, ε étant égal à $+1$, la condition sur β et β' s'écrit

$$\beta_i - \beta'_i = \frac{\sqrt{1-A^2}}{R}$$

β_i et β'_i étant les valeurs respectives de β et β' dans cecas Pour que ces deux relations soient vérifiées simultanément, il suffit de choisir:

$$(\text{IV}\,17) \qquad \boxed{\begin{aligned} \beta'_i &= \beta_e \\ \beta_i &= \beta'_e \end{aligned}}$$

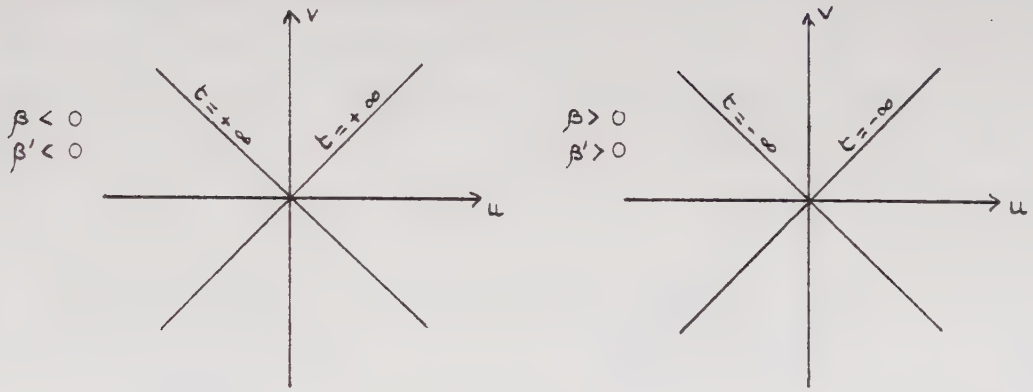
L'intérêt de ce choix est que la somme $\beta + \beta'$ ainsi que le produit $\beta\beta'$, figurant dans l'écriture de la métrique, restent inchangés. C'est pourquoi, la suite de cette étude relèvera de ce choix.

De plus, $\beta - \beta' = \frac{\sqrt{1-A^2}}{R}\varepsilon$ implique nécessairement $\beta > \beta'$ lorsque $\varepsilon = +1$ (soit $r < (9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$), et $\beta < \beta'$ lorsque $\varepsilon = -1$ (soit $r > (9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$).

(IV 18)

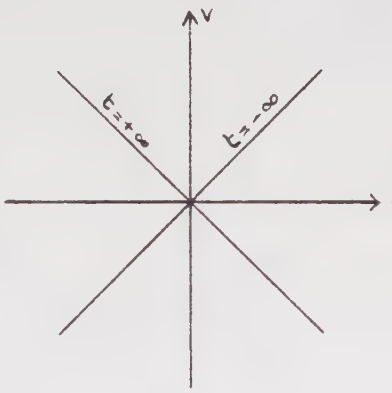
β	β'	$v-u \longrightarrow 0$	$v+u \longrightarrow 0$
$\beta > 0$	$\beta' > 0$	$t \longrightarrow -\infty$	$t \longrightarrow -\infty$
$\beta > 0$	$\beta' < 0$	$t \longrightarrow -\infty$	$t \longrightarrow +\infty$
$\beta < 0$	$\beta' < 0$	$t \longrightarrow +\infty$	$t \longrightarrow +\infty$
$\beta < 0$	$\beta' > 0$	$t \longrightarrow +\infty$	$t \longrightarrow -\infty$

β et β' de même signe

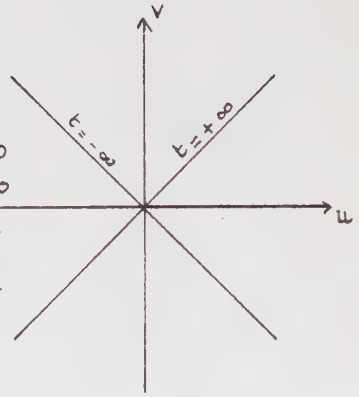


β et β' de signe contraire

$\beta - \beta' = \frac{\sqrt{1-A^2}}{R}\varepsilon$ donc $\begin{cases} \beta > 0 \\ \beta' < 0 \\ \text{pour} \\ \varepsilon = +1 \end{cases}$



et $\begin{cases} \beta < 0 \\ \beta' > 0 \\ \text{pour} \\ \varepsilon = -1 \end{cases}$



Ainsi, lorsque β et β' sont de même signe, les droites $v = \pm u$ représentent toutes deux soit $t=+\infty$, soit $t=-\infty$; dans ce cas, la métrique est toujours non statique. En effet, le produit $\beta\beta'$ étant positif, le facteur $e^{-(\beta+\beta')t}$ de l'écriture de la métrique n'est jamais constant : c'est une fonction de t. De plus, la relation

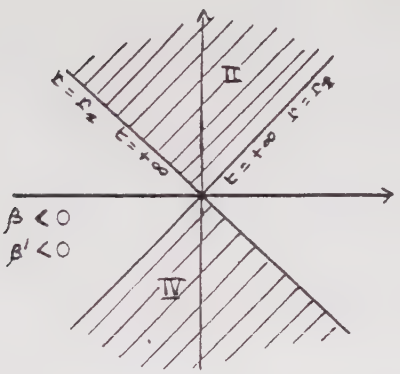
$\alpha\alpha'\beta\beta' > 0$ implique $\alpha\alpha' > 0$ donc les régions images sont les régions II et IV.

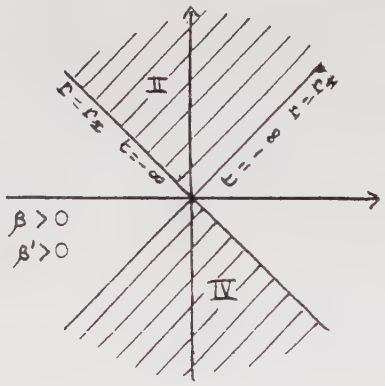
Lorsque β et β' sont de signe contraire, la droite v = u représente $t=-\infty$ (resp. $t=+\infty$), la droite v = -u représentant $t=+\infty$ (resp. $t=-\infty$); il existe, dans ce cas, des métriques statiques adéquates. Pour les obtenir, il suffit de choisir β et β' opposés. En effet:

$$\beta = -\beta' \quad \Longrightarrow \quad e^{-(\beta+\beta')t} = 1$$

La relation $\alpha\alpha'\beta\beta' > 0$ implique $\alpha\alpha' < 0$, les régions images sont alors les régions I et III.

Nous pouvons donc compléter les diagrammes précédents de la façon suivante :





$\boxed{\beta\beta' > 0}$
La métrique est toujours non statique

$$r_I = (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$$

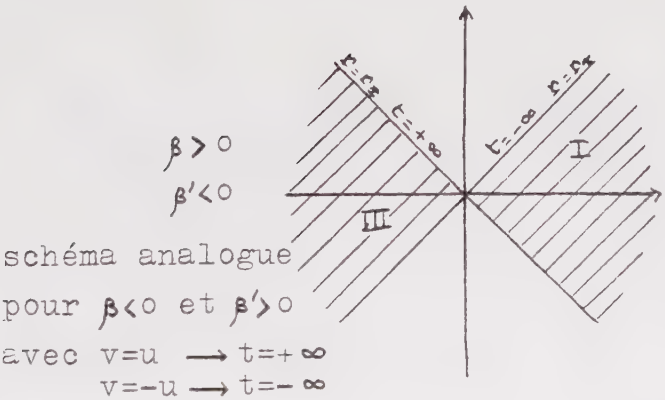


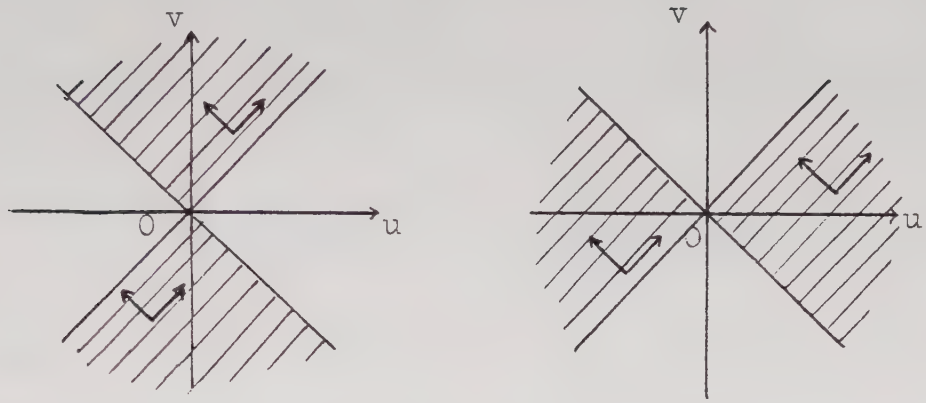
schéma analogue pour $\beta < 0$ et $\beta' > 0$
avec $v=u \longrightarrow t=+\infty$
$v=-u \longrightarrow t=-\infty$

$\boxed{\beta\beta' < 0}$
Il existe une possibilité de métrique statique : $\beta = -\beta'$

Remarque:

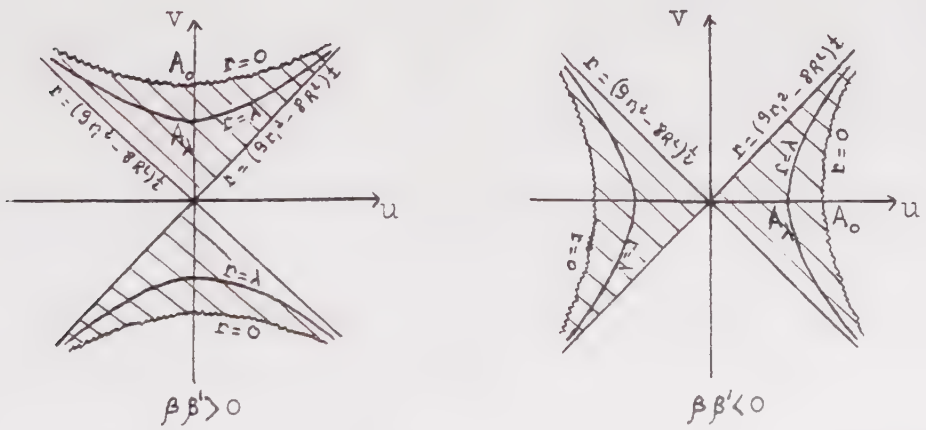
Quels que soient β et β', les géodésiques radiales du genre lumière

sont paralléles aux droites $v=\pm u$;les cônes de lumière sont donc les mêmes que ceux du diagramme de l'espace-temps de la relati--vité restreinte:



Dans tous les cas de métrique non statique (c'est-à-dire $\beta \neq -\beta'$) si nous considérons le plan (u,v) à t=cte,les régions r=cte sont représentées par des hyperboles $v^2 - u^2 = cte$,dont les asymptotes sont les droites $v=\pm u$.Nous allons étudier les posi--tions relatives de ces hyperboles suivant les valeurs de r,et leur évolutions lorsque t varie.

Considérons une hyperbole $r=\lambda$ et l'hyperbole représentative de la singularité initiale r=o:



Les points A_o et A_λ sont sur l'axe des v lorsque $\beta\beta'$ est positif,

sur l'axe des u lorsque $\beta\beta'$ est négatif. Appelons χ_λ et χ_o les coordonnées non nulles de A_λ et de A_o:

$$\chi_\lambda = v_{A_\lambda} \quad \text{si } \beta\beta' > o$$
$$\chi_\lambda = u_{A_\lambda} \quad \text{si } \beta\beta' < o$$

Connaissant l'expression de $v^2 - u^2$, nous pouvons écrire:

$$\chi_\lambda = \sqrt{\varepsilon' \alpha\alpha'}\ e^{\frac{\beta+\beta'}{2}t} \left| \frac{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi_\lambda}{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi_\lambda} \right| \quad \text{et} \quad \chi_o = \sqrt{\varepsilon' \alpha\alpha'}\ e^{\frac{\beta+\beta'}{2}t}$$

avec $\varepsilon' = +1$ si $\beta\beta' > o$ (soit $\alpha\alpha' > o$)

$\varepsilon' = -1$ si $\beta\beta' < o$ (soit $\alpha\alpha' < o$)

L'hyperbole $r = \lambda$, quelle que soit la constante λ, appartient à la région délimitée par les asymptotes et l'hyperbole r=o, région hachurée sur les diagrammes précédents. En effet:

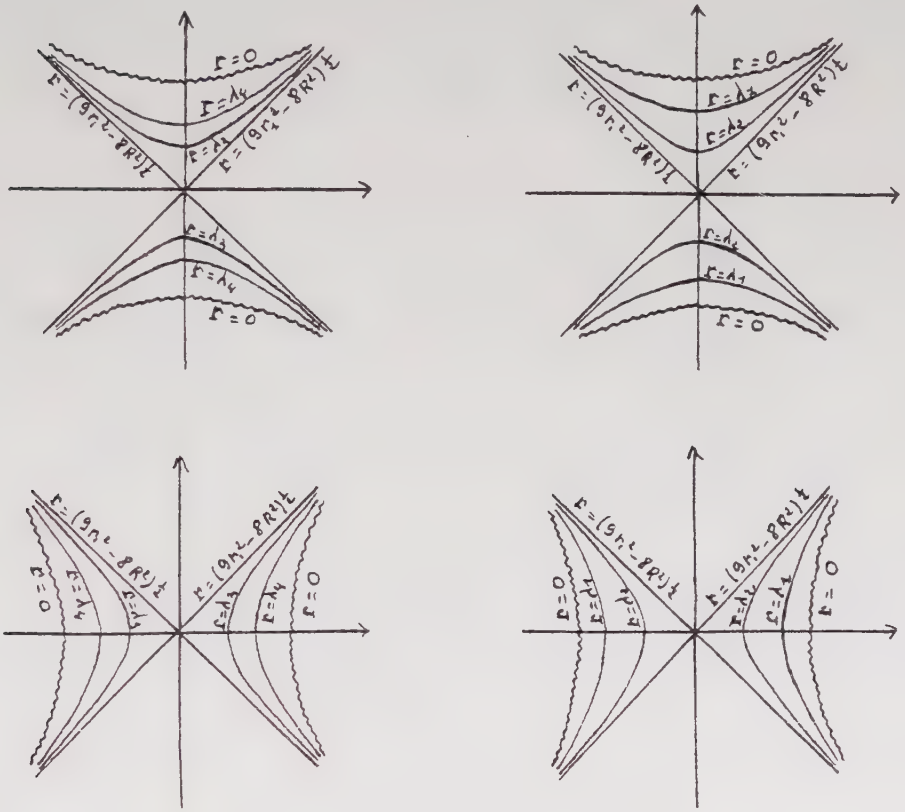
$$\forall \lambda\ , \quad \left| \frac{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi_\lambda}{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi_\lambda} \right| < 1$$

Nous avons vu, antérieurement, que l'expression $\dfrac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}$ croît lorsque r croît, donc l'inverse $\dfrac{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}$ décroît. Or, cette ex-pression est positive pour les valeurs de r inférieures à $(9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$, négative dans l'autre cas, ce qui permet d'affirmer que $\left| \dfrac{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi}{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\,\varphi} \right|$ est une fonction croissante de r à l'extérieur de la sphère $\mathcal{I}_{r_1}$, lieu des points tels que $r = (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$, et qu'elle est décroissante à l'intérieur. Ainsi:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}} \implies \chi_{\lambda_1} > \chi_{\lambda_2}$$
$$\lambda_4 < \lambda_3 < (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}} \implies \chi_{\lambda_3} < \chi_{\lambda_4}$$

Nous allons représenter sur deux diagrammes différents les hy-
-perboles correspondant d'une part aux valeurs de r inférieures
à $(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$, d'autre part à celles qui lui sont supérieures:

$\lambda_4 < \lambda_3 < (9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $\lambda_1 > \lambda_2 > (9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$



Nous nous proposons de suivre l'évolution au cours du temps de
l'hyperbole r=o, représentation de la singularité initiale.
Considérons $H_o(t)$ et $H_o(t')$, deux positions de cette hyperbole,
l'une à l'instant t, l'autre à l'instant t', t' étant supérieur à t

$$\chi_o(t) = \sqrt{\varepsilon'\alpha\alpha'}\, e^{(\beta+\beta')t}$$
$$\chi_o(t') = \sqrt{\varepsilon'\alpha\alpha'}\, e^{(\beta+\beta')t'}$$

Trois cas sont à distinguer:

1) $\beta + \beta' > 0$

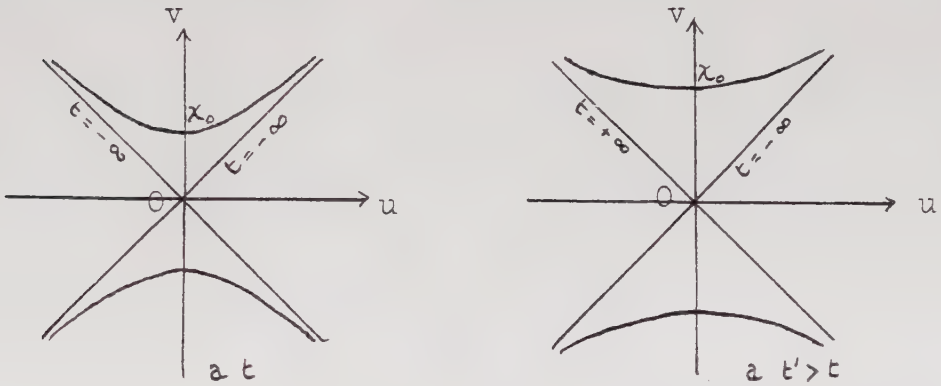
Alors $t' > t \implies \chi_0(t') > \chi_0(t)$

Or la condition $\beta + \beta' > 0$ est réalisée si

a) β et β' sont tous les deux positifs.

Dans ce cas $\varepsilon' = +1$ et $\alpha\alpha' > 0$ .Nous pouvons schématiser l'évo--tion de l'hyperbole de la façon suivante:

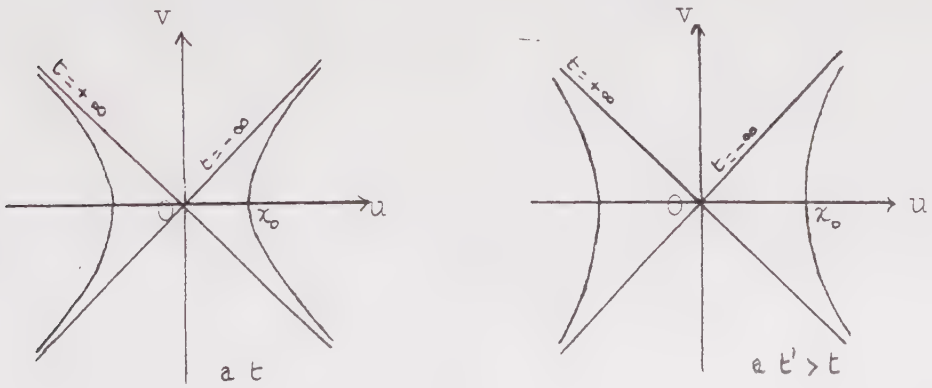
$$\chi_0(t) = \sqrt{\alpha\alpha'}\, e^{(\beta+\beta')t}$$



b) β et β' sont de signe différent,le nombre positif ayant la plus grande valeur absolue;or $\beta - \beta' = \frac{\sqrt{1-A^2}}{R}$ implique $\beta > \beta'$ soit $\beta > 0$.

Ainsi, $\varepsilon' = -1$ et $\alpha\alpha' < 0$

$$\chi_0(t) = \sqrt{-\alpha\alpha'}\, e^{(\beta+\beta')t}$$



Les cas a) et b),présentent un comportement analogue de l'hyper--bole;lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$,$H_0(t)$, confondue en $t = -\infty$

avec ses asymptotes, s'en "éloigne" (c'est-à-dire que ses sommets s'éloignent de plus en plus du centre) lorsque t tend vers $+\infty$:

$$t \longrightarrow -\infty \implies \chi_0(t) \longrightarrow 0$$
$$t \longrightarrow +\infty \implies \chi_0(t) \longrightarrow +\infty$$

2) $\beta + \beta' < 0$

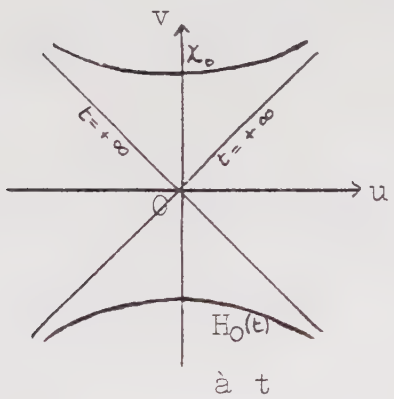
Alors $t' > t \implies \chi_0(t') < \chi_0(t)$

La condition $\beta + \beta' < 0$ est vérifiée si

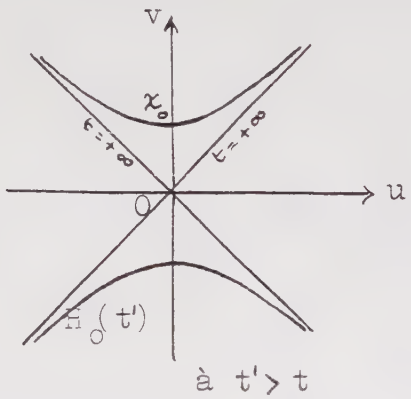
a) β et β' sont tous les deux négatifs.

ε' est égal à $+1$ et $\alpha\alpha'$ est positif. L'expression de $\chi_0(t)$ est la même que dans le a) du premier cas, mais maintenant, $e^{(\beta+\beta')t}$ décroît lorsque t croît:

$$\chi_0(t) = \sqrt{\alpha\alpha'}\, e^{(\beta+\beta')t}$$



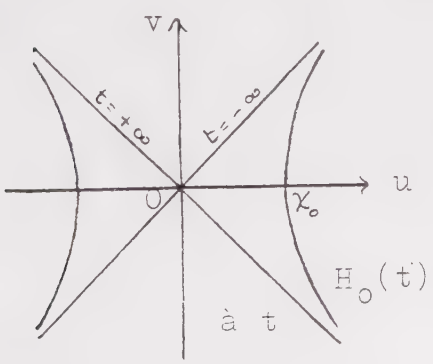
à t



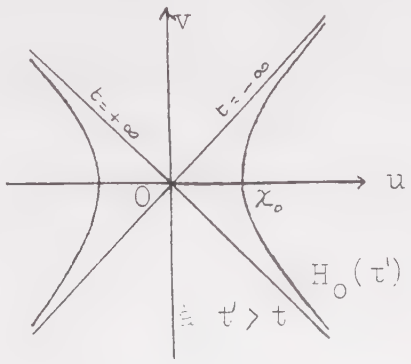
à $t' > t$

b) β et β' sont de signe différent, le nombre négatif, donc β', ayant la plus grande valeur absolue.

$\varepsilon' = -1$ et $\alpha\alpha' < 0$ implique $\chi_0(t) = \sqrt{-\alpha\alpha'}\, e^{(\beta+\beta')t}$



à t



à $t' > t$

Dans ce deuxième cas, $\beta+\beta' < 0$, contrairement au cas précédent, l'hyperbole se "rapproche" de ses asymptotes (c'est-à-dire que ses sommets se rapprochent du centre) lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$:

$$t \longrightarrow -\infty \implies \chi_0(t) \longrightarrow +\infty$$
$$t \longrightarrow +\infty \implies \chi_0(t) \longrightarrow 0$$

3) $\beta+\beta' = 0$

La métrique est statique. La configuration de l'espace-temps radial dans le plan (u,v) est indépendante de t. Elle est analogue à celle obtenue dans les cas précédents ($\beta+\beta' > 0$ ou $\beta+\beta' < 0$) à l'instant t=0. En effet, les hyperboles H_λ, représentatives des régions $r=\lambda$, ont pour équation, $\beta+\beta'$ étant nul:

$$v^2 - u^2 = \alpha\alpha' \left| \frac{1+\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi_\lambda}{1-\sqrt{\frac{1+A}{1-A}}\varphi_\lambda} \right|$$

relation identique à celle obtenue pour $\beta+\beta' = 0$ à l'instant t=0

Nous pourrions poursuivre bien au-delà l'étude de ces métriques nous sortirions alors quelque peu du cadre dans lequel nous nous sommes proposée d'opérer, et dont le but était de mettre en évidence la possibilité d'éliminer la pathologie $r = (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$ de l'expression de la métrique, par un changement de variables adéquat. Ce but vient d'être atteint pour les valeurs de r_1 appartenant à l'intervalle $\left[2m, \frac{9}{4}m\right[$. Nous devons démontrer que cela est encore de l'ordre du possible lorsque r_1 est égal à $\frac{9}{4}m$, d'où la nécessité d'introduire un nouveau changement de variables, celui que nous venons d'utiliser étant inadéquat pour $A=1$.

Deuxième cas: $\boxed{A = 1}$

A est égal à 1 lorsque r_1 prend la valeur $\frac{9}{4}m$, valeur correspon--dant au commencement de l'implosion. La métrique intérieure de Schwarzschild

$$ds^2 = -\frac{1}{4}\left(A-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

prend la forme:

$$(\text{IV}19)\quad ds^2 = -\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

Nous considérons les géodésiques radiales nulles, décrivant le mouvement des photons radiaux vers l'extérieur ou vers l'inté--rieur, dont les équations différentielles sont:

$$\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dt^2$$

Soit:
$$dt = \pm \frac{2dr}{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)}$$

r étant inférieur ou égal à R, nous introduisons, comme précédem--ment la variable θ définie par:

$$(\text{IV}20)\qquad r = R\sin\theta \quad \text{avec} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Les équations différentielles s'écrivent:

$$dt = \pm 2R \frac{d\theta}{(1-\cos\theta)}$$

Nous devons trouver les primitives de $\frac{1}{1-\cos\theta}$. Il suffit d'utiliser la variable

$$(\text{IV}21)\qquad \varphi = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \quad \text{ainsi} \quad \cos\theta = \frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2} \quad \text{et} \quad d\theta = \frac{2}{1+\varphi^2} d\varphi$$

Ce qui permet d'écrire:

$$\frac{d\theta}{1-\cos\theta} = \frac{\frac{2}{1+\varphi^2}\,d\varphi}{-\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}} = \frac{d\varphi}{\varphi^2}$$

Les primitives de $\frac{1}{\varphi^2}$ sont $-\frac{1}{\varphi}$ + cte.Les équations différentielles s'intègrent:

$$t = \pm 2R(-\frac{1}{\varphi}) + cte$$

φ ,nous l'avons vu,est une fonction croissante de r;il en est donc de même pour $-\frac{1}{\varphi}$,ce qui permet d'affirmer que le mouvement des photons radiaux vers l'extérieur correspond au signe "plus" des équations différentielles,et le mouvement des photons ra--diaux vers l'intérieur,au signe "moins".

$$t = 2R(-\frac{1}{\varphi}) + U$$
$$t = -2R(-\frac{1}{\varphi}) + V$$

Nous obtenons ainsi le système de coordonnées (U,V)

$$(\text{IV } 22) \qquad \begin{cases} U = t + \frac{2R}{\varphi} \\ V = t - \frac{2R}{\varphi} \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \varphi^2 = \frac{1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}$$

Nous pouvons exprimer la métrique à l'aide de ces nouvelles coordonnées:

$$\begin{cases} V - U = -\frac{4R}{\varphi} \\ V + U = 2t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dV - dU = \frac{4R}{\varphi^2}\,d\varphi \\ dV + dU = 2dt \end{cases}$$

Utilisant la relation établie antérieurement,

$$d\varphi = \frac{1}{2R}\,\frac{(1+\varphi^2)^2}{1-\varphi^2}\,dr$$

nous écrivons la différence dV - dU sous la forme:

$$dV - dU = \frac{2(1+\varphi^2)^2}{\varphi^2(1-\varphi^4)}\,dr$$

Ce qui permet de déduire les expressions de dr et dt en fonction

de dU et dV:

$$dr = \frac{1}{2} \times \frac{\varphi^2(1-\varphi^2)}{(1+\varphi^2)^2} (dV - dU)$$

$$dt = \frac{1}{2} (dV + dU)$$

On pose:

$$H = -\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dt^2 \quad \text{et} \quad K = \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}}$$

Remplaçons dans H et K, dt et dr par leur valeur donnée ci-dessus

$$H = -\frac{1}{16}\left(1-\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}\right)^2 (dV + dU)^2$$

$$K = \frac{1}{\left(\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}\right)^2} \times \frac{1}{4} \times \frac{\varphi^4(1-\varphi^2)^2}{(1+\varphi^2)^4} (dV - dU)^2$$

Or: $1-\frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2} = \frac{2\varphi^2}{1+\varphi^2}$

Aprés simplification, H et K s'écrivent:

$$H = -\frac{1}{4} \times \frac{\varphi^4}{(1+\varphi^2)^2} (dV + dU)^2$$

$$K = \frac{1}{4} \times \frac{\varphi^4}{(1+\varphi^2)^2} (dV - dU)^2$$

La métrique prend la forme:

$$ds^2 = -\frac{\varphi^4}{(1+\varphi^2)^2} dUdV + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\Psi^2$$

$\frac{\varphi^4}{(1+\varphi^2)^2}$ s'exprime en fonction de r; en effet:

$$\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} = \frac{1}{2}(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)$$

Ainsi:

$$(\text{IV } 23) \quad ds^2 = -\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dUdV + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\Psi^2$$

La pathologie intérieure est, dans le cas que nous traitons, à savoir le cas $r_1 = \frac{9}{4}m$, confondue avec la singularité initiale. Elle

persiste dans l'écriture en tant que pathologie intérieure car le coefficient de dUdV s'annule en r=o.Afin d'éliminer cette pathologie liée à la partie radiale de la métrique,nous intro--duisons les variables x et y définies par:

$$(\text{IV } 24)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{U} \\ y = \dfrac{\beta}{V} \end{cases} \qquad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes non nulles}$$

dx et dy s'expriment en fonction de dU et dV:

$$dx = \alpha\left(-\frac{1}{U^2}\right) dU \qquad dx = \alpha\left(-\frac{g^2}{(gt+2R)^2}\right) dU$$

$$dy = \beta\left(-\frac{1}{V^2}\right) dV \qquad dy = \beta\left(-\frac{g^2}{(gt-2R)^2}\right) dV$$

Ce qui implique:

$$dxdy = \alpha\beta\,\frac{g^4}{(g^2t^2-4R^2)^2}\,dUdV$$

La partie radiale de la métrique s'écrit:

$$-\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)\times\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{(g^2t^2-4R^2)^2}{g^4}\,dxdy$$

Or: $$g^4 = \frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2}$$

Donc: $$\frac{(g^2t^2-4R^2)^2}{g^4} = \frac{\left[\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)t^2-4\left(1+\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)R^2\right]^2}{\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2}$$

Nous pouvons maintenant écrire l'expression de la métrique:

$$(\text{IV } 25)\quad ds^2 = -\frac{1}{4\alpha\beta}\left[\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)t^2-4\left(1+\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)R^2\right]^2 dxdy + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

Afin d'éviter l'utilisation de coordonnées nulles,nous introdui--sons les coordonnées du genre espace et du genre temps,u et v:

$$(\text{IV } 26)\quad \begin{cases} u = \frac{1}{2}(y - x) \\ v = \frac{1}{2}(y + x) \end{cases}$$

Avec ces nouvelles coordonnées, la métrique est donnée par:

(IV 27)

$$\boxed{ds = -\frac{1}{4\alpha\beta}\left[\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)t^2 - 4\left(1+\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)R^2\right]^{-1}(dv^2 - du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2}$$

v devant être du genre temps et u du genre espace, les constantes α et β doivent vérifier la condition suivante:

$$\alpha\beta > 0$$

Ainsi, la métrique obtenue, quelles que soient les valeurs de α et β vérifiant cette condition, est <u>non statique</u>.

Considérons ce qu'il en est de la représentation des régions r=cte, dans ce nouvel espace-temps:

$$v^2 - u^2 = \frac{\alpha\beta}{UV} \quad \Longrightarrow \quad v^2 - u^2 = \frac{\alpha\beta}{t^2 - \frac{4R^2}{\gamma_\lambda^2}} \qquad (\text{IV } 28)$$

Pour tout λ différent de zéro, γ_λ est non nul, donc, à l'instant t=cte, les régions $r=\lambda$ sont représentées par des hyperboles ou des branches d'hyperboles, comme nous allons le voir. Lorsque λ tend vers zéro, γ_λ tend vers zéro; il en est de même pour $v^2 - u^2$: la singularité r=o est représentée par les droites $v = \pm u$ (il est à remarquer que cette propriété de r=o est due, non pas à la singularité initiale r=o, mais à la pathologie intérieure r=o, de même que dans le cas général A≠1, les droites $v = \pm u$ repré-sentaient la pathologie intérieure $r=(9r_i^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$).

La question se pose de savoir dans quelles régions du plan (u,v), suivant les valeurs de t, sont situées ces courbes.

Le produit $\alpha\beta$ étant positif, les différences $v^2 - u^2$ et $t^2 - \frac{4R^2}{\varphi^2}$ sont de même signe:

$$t^2 - \frac{4R^2}{\varphi^2} > 0 \implies v^2 - u^2 > 0$$

$$t - \frac{4R^2}{\varphi^2} < 0 \implies v^2 - u^2 < 0$$

Il y a en fait, dans le plan (u,v), deux régions vérifiant $v^2 - u^2 > 0$ (respectivement $u^2 - v^2 > 0$), les régions $v < -|u|$ et $v > +|u|$ (respectivement $u < -|v|$ et $u > +|v|$). Pour préciser les ré--gions concernées, il suffit de considérer les expressions de u et de v:

$$(\text{IV } 29) \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{t-\frac{2R}{\varphi}} - \frac{\alpha}{t+\frac{2R}{\varphi}}\right] \\ v = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{t-\frac{2R}{\varphi}} + \frac{\alpha}{t+\frac{2R}{\varphi}}\right] \end{cases}$$

Trois cas se présentent suivant les valeurs de t:

1) $t > \frac{2R}{\varphi}$

Les expressions $t-\frac{2R}{\varphi}$ et $t+\frac{2R}{\varphi}$ sont positives, donc si

a) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors $v > +|u|$

L'image, à un instant t supérieur à $\frac{2R}{\varphi}$, de la région $r=\lambda$, est une branche d'hyperbole située dans le quadrant II du plan (u,v).

b) $\alpha < 0$ et $\beta < 0$ alors $v < -|u|$

La branche d'hyperbole représentant la région $r=\lambda$ est située, dans ce cas, dans le quadrant IV

2) $t \in \left]-\frac{2R}{\varphi}, \frac{2R}{\varphi}\right[$

La différence $t-\frac{2R}{\varphi}$ est négative, la somme $t+\frac{2R}{\varphi}$ est positive, donc si

a) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors $u < -|v|$

L'image est une branche d'hyperbole située dans la région III.

b/ $\alpha < o$ et $\beta < o$ alors $u > +|v|$

La branche d'hyperbole est située dans le quadrant I

3/ $t < -\frac{2R}{\varphi}$

Les expressions $t-\frac{2R}{\varphi}$ et $t+\frac{2R}{\varphi}$ sont négatives, donc si

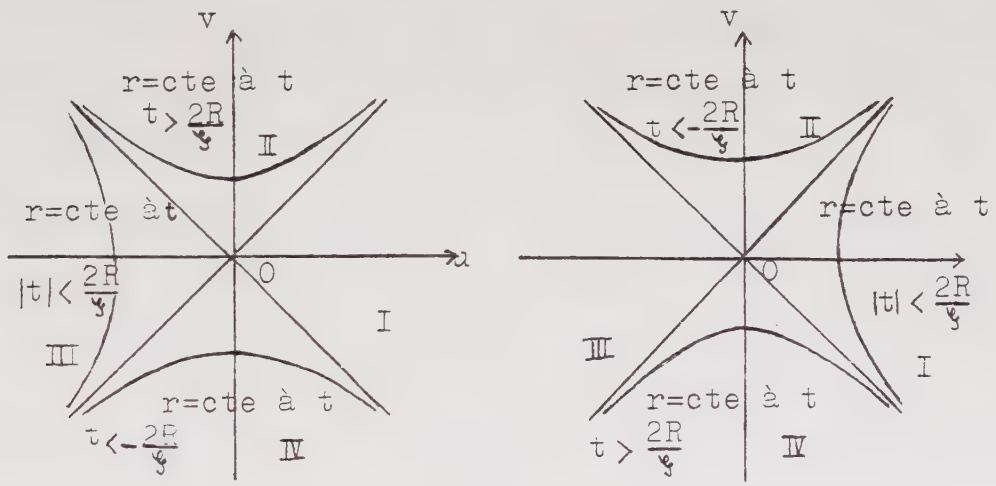
a/ $\alpha > o$ et $\beta > o$ alors $v < -|u|$

La branche d'hyperbole appartient au quadrant IV.

b/ $\alpha < o$ et $\beta < o$ alors $v > +|u|$

La courbe représentative est, dans ce cas, dans la région II du plan (u,v).

Nous pouvons, graphiquement, mettre en évidence ces résultats



Ces deux diagrammes montrent que, pour les valeurs de t vérifiant $|t| < \frac{2R}{\varphi}$, $v^2 - u^2$ est une constante négative, relation qui corres-pond à deux branches d'hyperbole (d'une même hyperbole $v^2 - u^2 = cte$) situées dans les régions I ($u > +|v|$) et III ($u < -|v|$). Or, le sys-tème de coordonnées (u,v) proposé, ne concerne qu'une seule de ces deux régions, III lorsque α et β sont positifs, I lorsqu'ils sont négatifs. Pour recouvrir les deux quadrants I et III, il suffit d'utiliser, dans le quadrant non concerné, le changement de vari-

-ables suivant:

$$(\text{IV } 30)\quad \begin{cases} u = -\frac{1}{2}\left[\dfrac{\beta}{t-\frac{2R}{\varphi}} - \dfrac{\alpha}{t+\frac{2R}{\varphi}}\right] \\ v = -\frac{1}{2}\left[\dfrac{\beta}{t-\frac{2R}{\varphi}} + \dfrac{\alpha}{t+\frac{2R}{\varphi}}\right] \end{cases}$$

Ainsi,l'image de r=cte à |t| =cte avec |t| inférieur à $\frac{2R}{\varphi}$, est une hyperbole située dans les quadrants I et III.De même, pour |t| supérieur à $\frac{2R}{\varphi}$,à deux valeurs opposées de t correspon--dent les deux branches d'une même hyperbole.Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

L'image de la région r=cte à |t| =cte,dans le plan (u,v),est une hyperbole située dans les quadrants I et III si |t| est in--férieur à $\frac{2R}{\varphi(r)}$,dans les quadrants II et IV si |t| est supérieur à cette valeur.

Nous pouvons résumer les résultats trouvés dans un tableau:

(IV 31)

$r = cte$ $(\Rightarrow \varphi = cte)$	$u = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{t-\frac{2R}{\varphi}} - \frac{\alpha}{t+\frac{2R}{\varphi}}\right)$ $v = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{t-\frac{2R}{\varphi}} + \frac{\alpha}{t+\frac{2R}{\varphi}}\right)$		$u = -\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{t-\frac{2R}{\varphi}} - \frac{\alpha}{t+\frac{2R}{\varphi}}\right)$ $v = -\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{t-\frac{2R}{\varphi}} + \frac{\alpha}{t+\frac{2R}{\varphi}}\right)$	
	$\alpha>0\ \ \beta>0$	$\alpha<0\ \ \beta<0$	$\alpha>0\ \ \beta>0$	$\alpha<0\ \ \beta<0$
$t > \frac{2R}{\varphi}$	II	IV		
$t \in \left]-\frac{2R}{\varphi}, \frac{2R}{\varphi}\right[$	III	I	I	III
$t < -\frac{2R}{\varphi}$	IV	II		

Supposons α et β positifs, l'étude dans le cas α et β négatifs étant analogue (il suffit de permuter le rôle des régions II et IV)

Nous appellerons $\chi_r(t)$ la distance des sommets de l'hyperbole H_r (r=o), image de la région r=cte à |t|=cte, au centre O:

$$\chi_r(t) = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\varepsilon''(t^2 - \frac{4R^2}{\varphi^2})}} \qquad \text{avec} \begin{cases} \varepsilon''=+1 \text{ si } |t| > \frac{2R}{\varphi} \\ \varepsilon''=-1 \text{ si } |t| < \frac{2R}{\varphi} \end{cases}$$

Suivons maintenant l'évolution de $\chi_r(t)$, lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$

1) t varie de $-\infty$ à $-\frac{2R}{\varphi}$

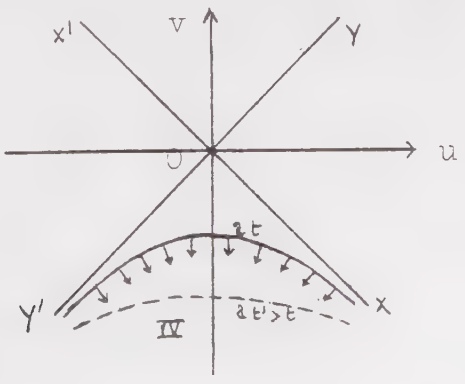
Alors $\chi_r(t) = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{t^2 - \frac{4R^2}{\varphi^2}}}$ .Ainsi χ_r est une fonction croissante de t:

$$t \to -\infty \Longrightarrow \chi_r(t) \to o$$
$$t \to -\frac{2R}{\varphi} \Longrightarrow \chi_r(t) \to +\infty$$

t	$-\infty$	$-\frac{2R}{\varphi}$
$\chi_r(t)$	o ↗	$+\infty$

L'image de la région r=cte est une branche d'hyperbole située dans le quadrant IV ; cette branche d'hyperbole est confondue avec les demi-droites asymptotes OX et OY' lorsque $t=-\infty$; son som-met s'"éloigne" de plus en plus de O lorsque t croît; il est rejeté à l'infini, et avec lui la branche toute entière, lorsque t atteint la valeur $-\frac{2R}{\varphi}$.

Nous pouvons schématiser ce processus, les flèches montrant le sens de l'évolution de la branche d'hyperbole.



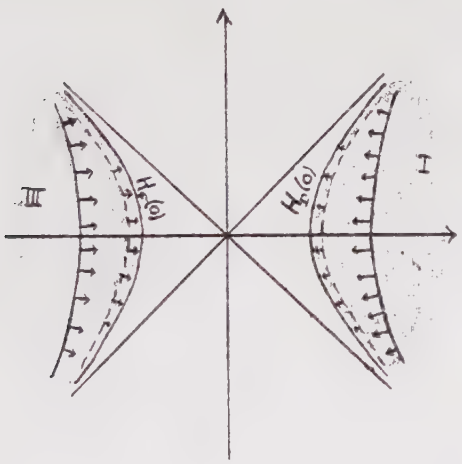
La branche d'hyper-bole balaie la région IV

2) t varie de $-\frac{2R}{\varphi}$ à $\frac{2R}{\varphi}$

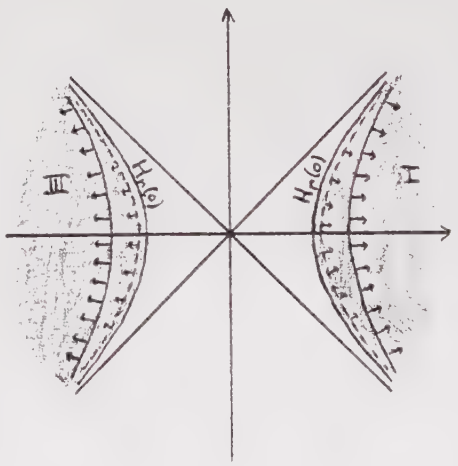
Alors $\chi_r(t) = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{-t^2+\frac{4R^2}{\varphi^2}}}$ .Ainsi, $\chi_r(t)$ décroît lorsque t croît de $-\frac{2R}{\varphi}$ à o,ensuite croît lorsque t croît de o à $\frac{2R}{\varphi}$.

t	$-\frac{2R}{\varphi}$	o	$\frac{2R}{\varphi}$
$\chi_r(t)$	$+\infty$ ↘	$\frac{\alpha\beta\varphi}{2R}$	↗ $+\infty$

L'image de la région r=cte est une hyperbole située dans les quadrants I et III.Les branches de l'hyperbole,situées à l'infini, au temps $t=-\frac{2R}{\varphi}$,se "rapprochent" (c'est-à-dire que les sommets se rapprochent du centre),pour atteindre la position minimale correspondant à $\chi_r(o) = \frac{\alpha\beta\varphi}{2R}$,puis s'"éloignent" à nouveau pour atteindre $+\infty$ lorsque $t=+\frac{2R}{\varphi}$.



t varie de $-\frac{2R}{\varphi}$ à o



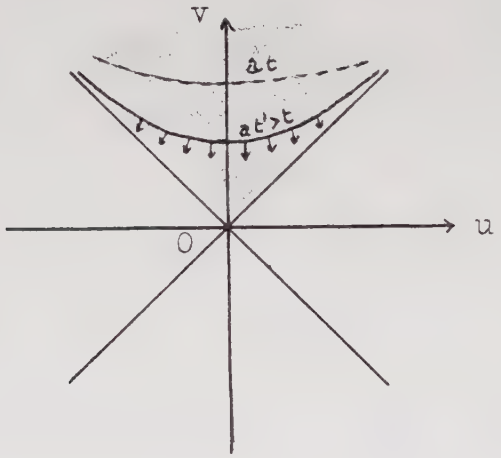
t varie de o à $\frac{2R}{\varphi}$

La région sombre représente le domaine balayé par l'hyperbole.

3) t varie de $\frac{2R}{\varphi}$ à $+\infty$

Alors $\chi_r(t) = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{t^2-\frac{4R^2}{\varphi^2}}}$

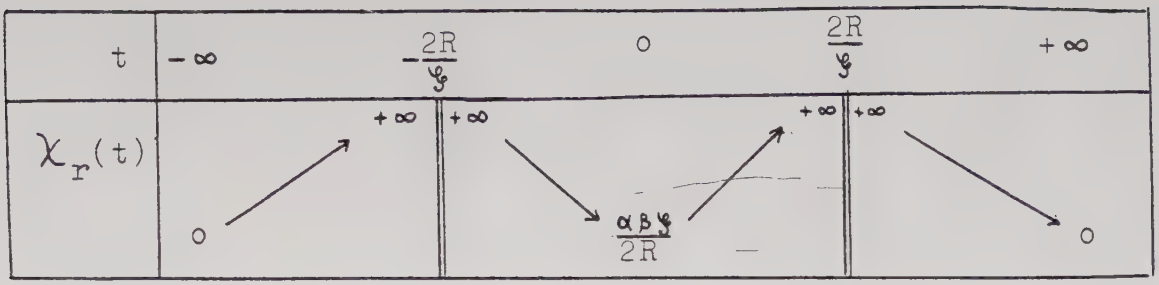
L'image de la région r=cte est une branche d'hyperbole située dans le quadrant I dont le comportement est analogue à celui décrit dans le premier cas,en raison du fait qu'à deux valeurs opposées de t correspondent les deux branches d'une même hyper--bole.t variant de $\frac{2R}{\varphi}$ à $+\infty$,la branche d'hyperbole,dégénérée en ses demi-asymptotes OX' et OY lorsque $t=\frac{2R}{\varphi}$,s'"éloigne" pour être rejetée à l'infini lorsque $t=+\infty$ .La représentation graphi--que,dans ce cas,est donnée par:



La branche d'hyper--bole balaie la région II

Nous pouvons résumer l'évolution de la courbe représentative de la région r=cte,au cours du temps,de la façon suivante: lorsque $t=-\infty$,cette courbe est confondue avec les demi-asympto--tes OX et OY' pour devenir,lorsque t croît de $-\infty$ à $-\frac{2R}{\varphi}$,une branche d'hyperbole qui balaie la région IV pour atteindre l'in--fini à $t=-\frac{2R}{\varphi}$;ensuite,t variant de $-\frac{2R}{\varphi}$ à o,cette branche d'hy--perbole,dans les régions I et III,"revient de l'infini",jusqu'à ce qu'elle atteigne,dans ces deux régions,les positions minima--les correspondant à $\chi_r(o)$;puis,elle "repart" vers l'infini de I et de III lorsque t varie de o à $\frac{2R}{\varphi}$,pour "revenir" une dernière fois,dans le quadrant II ,lorsque t croît de $\frac{2R}{\varphi}$ à $+\infty$,sa po--sition finale,à l'infini du temps,étant sa dégénérescence en

ses deux demi-asymptotes OX' et OY.



Cette description met en évidence une propriété fondamentale de l'étoile,pour $r_1=\frac{9}{4}m$,à savoir celle de l'effondrement gravita--tionnel:la géométrie de l'étoile est telle,qu'à partir d'une certaine valeur de t dépendant de r,les courbes r=cte,tendent inexorablement vers la singularité r=o,lorsque t tend vers l'infini.Ainsi,cette singularité r=o ne peut être atteinte qu'à l'infini du temps.Nous retrouvons donc le résultat énoncé au chapître précédent:

LA SINGULARITE r=o N'EST JAMAIS ATTEINTE

Nous limiterons là,nos investigations relatives à cet espace-temps,en étant consciente du fait que bien d'autres questions se posent,susceptibles de faire l'objet d'un travail ultérieur, travail qui sortirait du cadre que nous nous sommes fixée dans ce chapître:mettre en évidence une possibilité d'éliminer la pathologie intérieure $r=(9r_1^2-8R^2)^{\frac{1}{2}}$ de l'écriture de la métrique Ce projet,nous l'avons réalisé.

- CONCLUSION -

Nous pouvons conclure ce travail en nous interrogeant quant à la possibilité d'interprétation de la physique à l'in--térieur du Trou Noir.Toute interprétation physique se doit de tendre vers la plus grande "objectivité" possible,objectivité qu'il est possible d'atteindre dans la mesure où le sujet qui interprète fait partie de l'objet sur lequel il travaille.Etant élement de l'ensemble qu'il étudie,toute information le concer--nant,est une information sur l'ensemble;ainsi,le facteur subjec--tif ne doit pas perturber l'étude "objective" du problème considéré.Par contre,si le sujet n'appartient pas à l'objet dont il parle,s'ils relèvent de deux champs distincts,il va interpréter à travers son réseau conceptuel à lui,réseau fonda--mentalement différent de celui de l'objet étudié.Car,nos concepts peuvent-ils exister dans un univers qui n'est plus un univers de la matière,tout notre système logique de pensée étant précisément déterminé par un tel univers ? Toute la ques--tion est là,question des plus fondamentales en ce sens qu'elle soulève le problème du désir de rechercher,à savoir du désir de connaissance.

N'y a-t-il pas là,une limitation à notre possibilité de connaissance ?

> " La physique est mathématique non pas parce que nous en savons beaucoup sur le monde physique,mais parce que nous en savons fort peu : c'est seulement ses propriétés mathématiques que nous pouvons découvrir. "
>
> B.RUSSEL : An outline of Philosophy

- BIBLIOGRAPHIE -

[I] ANDRILLAT H. : Introduction à l'étude des Cosmologies.

[2] BUNGE M. : Philosophie de la physique.

[3] EDDINGTON A.S. : I922,The mathematical theory of Relativity

[4] EDDINGTON A.S. : I924,Nature,II3,I92.

[5] EINSTEIN A. & ROSEN N. :I935,Phys.Rev.,48,73.

[6] FINKELSTEIN D. : I958,"Past-future asymmetry of the gravitation field of a point particle",Phys.Rev.,II0,965.

[7] FULLER R.W. & WHEELER J.A. : I962,Phys.Rev.,I28,9I9.

[8] GEROCH R.P. : I967,"Singularities in the spacetime of General Relativity : their Definition,Existence,and Local Characterisation",doctoral dissertation,Princeton University.

[9] GEROCH R.P. : I968,"What is a singularity in General Relativity Ann.Phys.(U.S.A),48,526-540.

[I0] GODFREY B.B. : I97I,Journal of Math.Phys.,I2,606.

[II] GODFREY B.B. & MILLER J.G. & KRUSKAL M.D. : I97I,Phys.Rev.D,4,2

[I2] HEIDMANN J. : Introduction à la Cosmologie.

[I3] HEISENBERG W. : Physique et Philosophie

[I4] KRUSKAL M.D. : I960,Phys.Rev.,II9,I743.

[I5] KRUSKAL M.D. & MILLER J.G. & GODFREY B.B. : voir GODFREY

[I6] MERLEAU-PONTY J. : Cosmologie du XX^{e} sciècle.

[I7] MERLEAU-PONTY J. & MORANDO B. : Les trois étapes de la Cosmolog

[I8] MILLER J.G. & KRUSKAL M.D. & GODFREY B.B. : voir GODFREY

[I9] MISNER C.W. : I970,"Gravitational Collapse".

[20] MISNER C.W. & THORNE K.S. & WHEELER J.A. : Gravitation.

[2I] MORANDO B. & MERLEAU-PONTY J. : voir MERLEAU-PONTY

[22] NIETZSCHE F. : Par delà Bien et Mal.

[23] NOVIKOV I.D. : I963,doctoral dissertation,Schternberg Astronomi
-cal Institute,Moscow.

[24] OPPEINHEIMER J.R. & SNYDER H. : I939,"On continued gravitationa
contraction",Phys.Rev.,56,455-4

[25] PARNOV E. : Au Carrefour des Infinis.

[26] ROSEN N. & EINSTEIN A. : voir EINSTEIN.

[27] RUSSEL B. : L'Analyse de la Matière.

[28] SNYDER H. & OPPEINHEIMER J.R. : voir OPPEINHEIMER.

[29] SORLET N. : Introduction mathématique à la physique des "Black
Holes",Université de Liège.

[30] SYNGE J.L. : I950,"The gravitational field of a particle"
Proc.R.Irish Acad.A 53,83-II4.

[30] SZEKERES G. : I960,Publ.Math.Debrecen 7,285-30I.
"On the singularities of a Riemannian manifold"

[32] THORNE K.S. & MISNER C.W. & WHEELER J.A. : voir MISNER.

[33] WHEELER J.A. & THORNE K.S. & MISNER C.W. : voir MISNER

TABLE DES MATIERES

- INTRODUCTION : pages I à I3

- CHAPITRE I : Quelques rappels au sujet de l'effondrement gravitationnel...
Ce qui est de l'ordre de l'observable...
pages I4 à 23

- CHAPITRE I : Qu'en est-il des "singularités" dans les métriques de Schwarzschild ?

I Une première remarque relative à la métrique extérieure de Schwarzschild...
pages 25 à 27

2 En ce qui concerne la métrique intérieure
pages 27 à 3I

3 Processus interne de l'écroulement gravitationnel...
pages 3I à 43

4 Caractère intrinsèque et non intrinsèque des pathologies...
pages 43 à 45

- CHAPITRE II : Une nouvelle approche du Trou Noir sans charge ni rotation...
pages 46 à 65

- CHAPITRE I : Une proposition de changement de variables permettant l'obtention d'une métrique non singulière au voisinage de $r = (9r_1^2 - 8R^2)^{\frac{1}{2}}$ ... pages 66 à I03

- CONCLUSION : page I05

- BIBLIOGRAPHIE : pages I06 à I08